目　　录

第一章　代数基础

§1. 反对称形式

我们用 V 来表示特征 $\neq 2$ 的域 k 上的有限维向量空间，用 $A^p(V)$ 来表示 V 上取值于 k 中的反对称 p- 线性形(或称 p- 形式)所构成的向量空间，特别地，$A^0(V)=k$，$A^1(V)$ 就是 V 的对偶空间 V^*.

设 $\alpha\in A^p(V)$，$\beta\in A^q(V)$，则 p-形式 α 和 q-形式 β 的外积 $\alpha\wedge\beta$ 是一个 $p+q$-形式，它在 $(x_1,\cdots,x_{p+q})\in\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p+q}$ 处的值由下式决定

$$(\alpha\wedge\beta)(x_1,\cdots,x_{p+q})$$
$$=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}(p,q)}\operatorname{sg}(\tau)\alpha(x_{\tau(1)},\cdots,x_{\tau(p)})\beta(x_{\tau(p+1)},\cdots,x_{\tau(p+q)}),$$

其中 $\mathfrak{S}(p,q)$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,p+q\}$ 的所有满足下面的条件的置换 τ 的全体:

(i) $\tau(1)<\tau(2)<\cdots<\tau(p)$

且

(ii) $\tau(p+1)<\tau(p+2)<\cdots<\tau(p+q)$.

用这种方式定义的外积满足结合律，从而在

$$A(V)=\bigoplus_p A^p(V)$$

上定义了一个分级代数结构. 根据外积的定义，若 $\alpha\in A^p(V)$，$\beta\in A^q(V)$，则我们有

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

因为这一性质，所以我们称分级代数 $A(V)$ 为 Z_2- 可换的(或 Z_2-交换).

设 $f_1,\cdots,f_n$ 为 V 的一组基，并且设 λ 为任意一个从集合 $\{1,2,\cdots,p\}$ 到集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 内的映射，我们记

$$f^{\lambda} = f_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge f_{\lambda(p)},$$

则当 λ 遍取所有的从 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 内的满足条件

$$\lambda(1) < \lambda(2) < \cdots < \lambda(p)$$

的映射时，所得到的 f^{λ} 的全体就构成空间 $A^{p}(V)$ 的一组基. 设 $n = \dim V$，则对任一整数 $p \geqslant 0$，我们有 $\dim A^{p}(V) = \binom{n}{p}$.

对任一 $x \in V$，我们定义分级空间 $A(V)$ 的一个 -1 级的自同态 $i(x)$ 如下:

$$(i(x)\alpha)(x_1, \cdots, x_{p-1}) = \alpha(x, x_1, \cdots, x_{p-1}),$$

对所有的 $\alpha \in A^{p}(V)$ 和所有的 $x_1, \cdots, x_{p-1} \in V$ 都成立. 设 $\alpha \in A^{p}(V)$，则 $i(x)\alpha$ 是一 $(p-1)$-形式，我们称 $i(x)\alpha$ 为 α 通过 x 的内积. 根据 $i(x)$ 的定义可知，映射

$$x \longmapsto i(x)$$

是从 V 到 $A(V)$ 的自同态空间 $\mathrm{End}(A(V))$ 内的一个线性映射. 对任意的 $x, y \in V$，我们有

$$(1.1) \qquad i(x) \circ i(y) + i(y) \circ i(x) = 0.$$

若 $\alpha \in A^{p}(V)$，$\beta \in A(V)$，则我们有

$$(1.2) \quad i(x)(\alpha \wedge \beta) = (i(x)\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p} \alpha \wedge (i(x)\beta).$$

由于这个性质，所以我们称 $i(x)$ 为分级代数 $A(V)$ 的 Z_2- 导子.

1.3. **定义.** 设 α 是向量空间 V 上的一个反对称 p- 形式 我们称由 V 中所有满足 $i(x)\alpha = 0$ 的元素 x 所构成的子空间为 α 的核，记为 $\mathrm{Ker}\alpha$. α 的核的余维数称为 α 的秩 ($= \dim V - \dim \mathrm{Ker}\alpha$).

设 V, W 为域 k 上的两个向量空间，f 为从 V 到 W 的一个线性映射，我们利用下面的等式

$$(A(f)\beta)(x_1, \cdots, x_p) = \beta(f(x_1), \cdots, f(x_p)),$$

其中 $\beta \in A^{p}(W)$ 和 $x_1, \cdots, x_p \in V$ 均为任意，来定义一个从分级代数 $A(W)$ 到分级代数 $A(V)$ 内的同态 $A(f)$. 由 $A(f)$ 的定义知，若 f 是内射 (或满射)，则 $A(f)$ 也是内射 (或满射).

设 $\alpha \in A^p(V)$，N 为 V 的一个向量子空间且 $N \subset \mathrm{Ker}\alpha$. 记从 V 到 V/N 上的标准映射为 q，则不难看出，存在唯一的一个 p-形式 $\beta \in A^p(V/N)$ 使 $\alpha = A(q)\beta$. 我们有

$$\mathrm{Ker}\beta = q(\mathrm{Ker}\alpha).$$

由一个反对称 2- 形式定义的正交性. 设 ω 是向量空间 V 上的一个反对称 2- 形式. V 的两个元素 x, y 称为是互相正交的(对于 ω)，如果有 $\omega(x,y) = 0$. 设 E 是 V 的一个子空间，我们以 $E^\perp$ 来表示由 V 中所有满足 $\omega(x,y) = 0$, $\forall y \in E$, 的 x 所构成的 V 的子空间，并把它称为 E 的正交补. 我们不加证明地引用下列结论，读者可试证之:

(i) 对 V 的任一子空间 E 都有

$$E^\perp \supset \mathrm{Ker}\omega,$$
$$(E^\perp)^\perp = E + \mathrm{Ker}\omega,$$
$$((E^\perp)^\perp)^\perp = E^\perp.$$

(ii) 若 E, F 为 V 的两个子空间，则有

$$(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp.$$

(iii) 若 $E \subset F$，则 $E^\perp \supset F^\perp$.

(iv) 若 $\mathrm{Ker}\omega \subset E \cap F$，则有

$$(E + F)^\perp = E^\perp + F^\perp.$$

1.4. **引理.** 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 E 为 V 的一个子空间，则我们有

$$\dim E^\perp = \dim V - \dim E + \dim(E \cap \mathrm{Ker}\omega).$$

证. 根据 $i(x)$ 的定义知，映射

$$x \longmapsto i(x)\omega, \quad x \in V,$$

是从 V 到 V^* 的线性映射，它的核为 $\mathrm{Ker}\omega$. 在这个映射下，E 的象的维数是

$$\dim E - \dim(E \cap \mathrm{Ker}\omega).$$

但根据对偶性，E 的象是 $E^\perp$ 的正交补，所以它的维数等于 $E^\perp$ 的余维数，所以结论成立. 证完.

1.5. **定义.** 设 ω 是向量空间 V 上的一个反对称 2- 形式. 又

设 E 是 V 的一个子空间，则

若 $E\subset E^{\perp}$，E 称为 (V,ω) 的迷向子空间；

若 $E\supset E^{\perp}$，E 称为 (V,ω) 的余迷向子空间；

若 $E=E^{\perp}$，E 称为 (V,ω) 的 Lagrange 子空间；

若 $E\cap E^{\perp}=(0)$，E 称为 (V,ω) 的辛子空间.

由定义可知，所有维数 $\leqslant 1$ 的子空间都是迷向的，所有余维数 $\leqslant 1$ 且含 $\mathrm{Ker}\omega$ 的子空间都是余迷向的，而根据包含关系来确定的极小迷向子空间和极小余迷向子空间都是 Lagrange 子空间.

1.6. **命题.** 设 $\omega\in A^2(V)$ 并设 L 为 (V,ω) 的一个 Lagrange 子空间，则

$$\text{秩 }\omega=2(\dim L-\dim\mathrm{Ker}\omega).$$

证. 事实上，因为 L 是一 Lagrange 子空间，所以

$$L\cap\mathrm{Ker}\omega=L^{\perp}\cap\mathrm{Ker}\omega=\mathrm{Ker}\omega.$$

从而利用引理 1.2 得

$$\dim L=\dim V-\dim L+\dim\mathrm{Ker}\omega.$$

证完.

推论. V 上任一反对称 2-形式的秩都是偶数，空间 (V,ω) 的所有 Lagrange 子空间具有相同的维数.

1.7. **命题.** 设 $\omega\in A^2(V)$ 并设 W 是 (V,ω) 的一个余迷向子空间，则对 (V,ω) 的任一 Lagrange 子空间 L，$L\cap W=W^{\perp}$ 都是 $(W,\omega|W)$ 的一个 Lagrange 子空间.

证. 因为 L 和 W 都是余迷向的，所以

$$\mathrm{Ker}\omega\subset L\cap W.$$

从而

$$(L\cap W)^{\perp}=L^{\perp}+W^{\perp}=L+W^{\perp}.$$

又由于 W 是余迷向的，所以

$$(L\cap W)^{\perp}\cap W=(L+W^{\perp})\cap W=L\cap W+W^{\perp}.$$

这说明 $L\cap W+W^{\perp}$ 在 $(W,\omega|W^2)$ 中的正交补就是它本身. 证完.

1.8. **命题.** 设 $\omega\in A^2(V)$ 并设 N 为 V 的一个含于 $\mathrm{Ker}\omega$ 中的子空间. 设

$$q:\ V\to V/N$$

为标准映射，$\omega'\in A^2(V/N)$ 满足关系式

$$A(q)\omega' = \omega,$$

则映射

$$L\longmapsto q(L)$$

是从 (V,ω) 的 Lagrange 子空间所构成的集合到 $(V/N,\omega')$ 的 Lagrange 子空间所构成的集合上的一个双射 (bijection).

证. 因为对任意的 $x, y\in V$ 有

$$\omega'(q(x), q(y)) = \omega(x, y),$$

所以对任一子空间 $E\subset V$, $q(E^\perp)$ 是 $q(E)$ 关于 ω' 的正交补. 因此,若 L 是 (V,ω) 的一个 Lagrange 子空间，则 $q(L)$ 是 $(V/N,\omega')$ 的一个 Lagrange 子空间. 由于 $N\subset\mathrm{Ker}\omega$, 所以 (V,ω) 的任一 Lagrange 子空间均含 N, 于是有

$$L = q^{-1}(q(L)).$$

这说明映射

$$L\longmapsto q(L)$$

是一内射. 现证它也是满射. 设 L' 是 $(V/N,\omega')$ 的一个 Lagrange 子空间,令

$$L = q^{-1}(L'),$$

则有

$$q(L^\perp) = q(L)^\perp = L',$$

从而

$$L^\perp + N = L + N.$$

又因为

$$N\subset\mathrm{Ker}\omega\subset L^\perp \text{ 且 } N = \mathrm{Ker}q\subset L,$$

所以有 $L^\perp = L$. 于是证明了 L 是 (V,ω) 的一个 Lagrange 子空间且有 $q(L) = L'$. 证完.

1.9. **命题.** 设 $\omega\in A^2(V)$ 并设 L 为 (V,ω) 的一个 Lagrange 子空间. 令 J 为 (V,ω) 的所有满足 $E\cap L=(0)$ 的迷向子空间

E 所构成的集合． 若 F 是由包含关系来确定的 J 的一个极大元，则 V 是 L 和 F 的直和．

证．事实上，若 $x \in F^{\perp}$，则子空间 $F + kx$ 是迷向子空间，从而

$$F + kx \subset F \quad 或者 \quad (F + kx) \cap L \neq (0).$$

无论怎样都有 $F^{\perp} \subset F + L$．于是有

$$F^{\perp} \cap L = F^{\perp} \cap L^{\perp} = (F + L)^{\perp} \subset (F^{\perp})^{\perp} = F + \mathrm{Ker}\omega.$$

因而

$$F^{\perp} \cap L \subset (F + \mathrm{Ker}\omega) \cap L = \mathrm{Ker}\omega$$

且

$$V = (F^{\perp} \cap L)^{\perp} = F + \mathrm{Ker}\omega + L^{\perp} = F + L.$$

证完．

我们称由命题 1.9 给出的 F 为 Lagrange 子空间 L 的迷向补子空间．

推论 1. 设 L 为 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间，设 $f_1, \cdots, f_r$ 为 V 的对偶空间 V^* 里的一组线性无关的 1-形式使得

$$L = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathrm{Ker} f_i,$$

则在 V^* 中存在 r 个线性无关的 1-形式 $f_{r+1}, \cdots, f_{2r}$ 使 $f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_{2r}$ 线性无关且

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}.$$

证．事实上，设 F 是 L 在 V 中的迷向补子空间，$e_1, \cdots, e_r$ 为 F 的一组满足 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ 的基．令

$$f_{r+i} = i(e_i)\omega, \quad i = 1, \cdots, r,$$

则因为 F 是迷向的，所以有

$$i(e_j) f_{r+i} = \omega(e_i, e_j) = 0, \quad i, j = 1, \cdots, r.$$

因此，

$$i(e_j)\left(\omega - \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}\right) = f_{r+j} - f_{r+j} = 0$$

对所有 $1 \leqslant j \leqslant r$ 成立．由此推知形式

$$\omega - \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}$$

的核包含 F. 另外，由推论的假设知上面的形式限制在 L 上为 0. 又由 F 的定义有

$$V = F + L.$$

于是便有

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}.$$

为证 $f_1, \cdots, f_{2r}$ 的无关性，注意到 ω 的核包含

$$\bigcap_{r < i \leq 2r} \mathrm{Ker} f_i,$$

但是它的核的维数是

$$2\dim L - \dim V = \dim V - 2r,$$

于是 $f_1, \cdots, f_{2r}$ 是线性无关的. 证完.

推论 2. 设 L 是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间，则存在 (V, ω) 的 Lagrange 子空间 $\tilde{L}$ 使得

$$L \cap \tilde{L} = \mathrm{Ker}\omega,$$

因而也就有

$$V = L + \tilde{L}.$$

证. 沿用推论 1 的符号，令

$$\tilde{L} = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathrm{Ker} f_{r+i}$$

便可. 证完.

推论 3. 若域 k 的特征为 0，ω 的秩为 $2r$，则 ω 的 r 阶外积幂 $\omega^r \neq 0$ 而 $r+1$ 阶外积幂 $\omega^{r+1} = 0$.

证. 沿用推论 1 的符号，设

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i},$$

则有

$$\begin{aligned} \omega^r &= r!\, f_1 \wedge f_{r+1} \wedge f_2 \wedge f_{r+2} \cdots f_r \wedge f_{2r} \\ &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} r!\, f_1 \wedge f_2 \cdots f_{2r}. \end{aligned}$$

由此推得结论成立. 证完.

§2. 辛向量空间，辛基底

设 V 是特征 $\neq 2$ 的域 k 上的向量空间.

2.1. **定义.** 设 ω 是 V 上的一个反对称 2-形式. 若 $\mathrm{Ker}\omega=(0)$,则我们称 ω 为 V 上的一个**辛形式**，这时，我们把 (V,ω) 称为**辛空间**.

若 (V,ω) 是一辛空间，则 $\dim V=$ 秩ω，从而 V 是偶维数空间. 此时(V,ω) 的 Lagrange 子空间的维数为 $\frac{1}{2}\dim V$.

例 1. 设 W 是域 k 上维数为 r 的一个向量空间，W^* 为 W 的对偶空间. 对任意的 $x_1, x_2\in W$ 和任意的 $f_1, f_2\in W^*$，令

$$\omega((f_1,x_1),(f_2,x_2))=f_1(x_2)-f_2(x_1),$$

则 ω 是 $W^*\times W$ 上的一个辛形式. 不难看出，$W^*\times 0$ 和 $0\times W$ 都是$(W^*\times W,\omega)$ 的 Lagrange 子空间.

例 2. 设 $f_1,\cdots,f_{2r}$ 是向量空间 k^{2r} 的自然坐标，则

$$\omega=\sum_{i=1}^{r}f_i\wedge f_{r+i}$$

是 k^{2r} 上的一个辛形式，我们称它为 k^{2r} 上的**标准**辛形式，而称辛空间 (k^{2r},ω) 为 $2r$ 维的标准辛 k- 空间.

根据命题 1.7 的推论 2，辛空间 (V,ω) 的任一 Lagrange 子空间 L 在 V 中都有一 Lagrange 补子空间，即有 (V,ω) 的 Lagrange 子空间 $\tilde{L}$ 使得

$$L\cap\tilde{L}=(0)\quad 且\quad V=L\dotplus\tilde{L}.$$

2.2. **命题.** 设 (V,ω) 是一 $2n$ 维的辛空间，L_1 和 L_2 是 (V,ω) 中互补的两个 Lagrange 子空间. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 L_1 的一组基，则存在 L_2 的一组唯一的基 $e_{n+1},\cdots,e_{2n}$ 使得

$$\omega(e_i,e_{n+j})=\delta_{ij},\ 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

证. 事实上，映射

$$x\longmapsto(i(x)\omega)|L_1$$

是从 L_2 到 L_1 的对偶空间 L_1^* 上的一个同构。令 $f_1, \cdots, f_n$ 为 L_1^* 中与 $e_1, \cdots, e_n$ 相对偶的一组基。对任一 $1 \leqslant i \leqslant n$，取 $e_{n+i} \in L_2$ 使

$$(i(e_{n+i})\omega)|L_1 = -f_i,$$

则 $e_{n+1}, \cdots, e_{2n}$ 为 L_2 的一组基且

$$\omega(e_i, e_{n+j}) = f_j(e_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

证完。

2.3. **定义.** 设 (V, ω) 是一 $2n$ 维的辛空间。若 V 的一组基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 满足

$$\omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij} \quad 且 \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0,$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则我们称它为 (V, ω) 的一组辛基.

由命题 1.9 的推论 2 和命题 2.2 可知任一辛空间 (V, ω) 都有辛基。

若 (V, ω) 是一辛空间，则在一组辛基下，ω 所对应的矩阵具有形式

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_n 为 n 阶单位方阵。

若 (V, ω) 是一辛空间，则 V 的一组基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 是一组辛基的充要条件为：对于 V^* 中相对于 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 的对偶基 $f_1, \cdots, f_{2n}$，

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \wedge f_{n+i}.$$

习题。设 L_1 和 L_2 是辛空间 (V, ω) 的两个 Lagrange 子空间.试证明在 V 中存在同时为 L_1 和 L_2 的 Lagrange 补的子空间。

§3. $sl(2, k)$ 在辛向量空间上的反对称形式代数中的标准线性表示

在这一节中，k 表示特征为 0 的域，$sl(2, k)$ 表示 k 上由基

元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所生成的三维 Lie 代数（见本节末的注）.

设 (V, ω) 是 k 上一 $2n$ 维的辛空间. 对 $\alpha \in A^r(V)$，记空间 $A(V)$ 的自同态

$$\beta \longmapsto \alpha \wedge \beta, \quad \beta \in A(V),$$

为 $\mu(\alpha)$，则 $\mu(\alpha)$ 是 $A(V)$ 的一个 r 级的自同态，即它把每一子空间 $A^p(V)$ 映入子空间 $A^{p+r}(V)$ 中. 特别地,

$$X = \mu(\omega)$$

是一 2 级自同态.设 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 是 (V, ω) 的一组辛基，则自同态

$$Y = \sum_{j=1}^{n} i(e_j) i(e_{n+j})$$

是一 -2 级的自同态.

3.1. **引理.** 对每一 $x \in V$ 都有

$$i(x) = Y \circ \mu(f) - \mu(f) \circ Y,$$

其中 $f = i(x)\omega$.

证. 根据定义，对任一 e_j，$1 \leqslant j \leqslant 2n$，$i(e_j)$ 都是一个 -1 级的 Z_2- 导子，即对任意的 $\alpha \in A^p(V)$ 和 $\beta \in A^q(V)$ 都有

$$i(e_j)(\alpha \wedge \beta) = (i(e_j)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(e_j)\beta).$$

所以对任一 $\beta \in A(V)$ 我们有

$$\begin{aligned}(i(e_j) \circ \mu(f))(\beta) &= i(e_j)((i(x)\omega) \wedge \beta) \\ &= (i(e_j) i(x)\omega) \wedge \beta + (-1)(i(x)\omega) \wedge (i(e_j)\beta), \\ (\mu(f) \circ i(e_j))(\beta) &= f \wedge (i(e_j)\beta) \\ &= (i(x)\omega) \wedge (i(e_j)\beta).\end{aligned}$$

又

$$\mu(f(e_j))(\beta) = f(e_j) \wedge \beta = \omega(x, e_j)\beta.$$

于是推出

$$i(e_j) \circ \mu(f) + \mu(f) \circ i(e_j) = \mu(f(e_j)), 1 \leqslant j \leqslant 2n.$$

现设

$$x = \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i,$$

则有

$$\mu(f(e_i)) = -x_{n+i}, \ \mu(f(e_{n+i})) = x_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

于是有

$$\begin{aligned} Y\circ\mu(f) &= \sum_{j=1}^{n} i(e_j)i(e_{n+j})\mu(f) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j i(e_j) - \sum_{j=1}^{n} i(e_j)\mu(f)i(e_{n+j}), \\ \mu(f)\circ Y &= \sum_{j=1}^{n} \mu(f)i(e_j)i(e_{n+j}) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} x_{n+j}i(e_{n+j}) - \sum_{j=1}^{n} i(e_j)\mu(f)i(e_{n+j}). \end{aligned}$$

两式相减得

$$Y\circ\mu(f) - \mu(f)\circ Y = \sum_{j=1}^{2n} x_j i(e_j) = i(x).$$

证完.

现在我们证明上面所定义的 $A(V)$ 的自同态 Y 不依赖于辛基底 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 的选择。

事实上，设 $e'_1, \cdots, e'_{2n}$ 是 (V, ω) 的另一组辛基，并设

$$Y' = \sum_{j=1}^{n} i(e'_j)i(e'_{n+j}),$$

则由引理 3.1 得

$$(Y' - Y)\circ\mu(f) = \mu(f)\circ(Y' - Y),$$

对任意的 1-形式 $f = i(x)\omega$ 成立. 因而对任意的 $f \in V^*$ 成立. 于是对任意的 $f \in V^*$, $Y' - Y$ 的核是 $\mu(f)$ 的不变子空间. 又因为代数 $A(V)$ 是由 $V^* = A^1(V)$ 所生成的，所以 $Y' - Y$ 的核是 $A(V)$ 的一个理想. 但 $Y' - Y$ 的核显然含 $A(V)$ 的单位元. 于是 $Y' = Y$.

若设 $f_1, \cdots, f_{2n}$ 是 V^* 的一组相对于 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 的对偶基，则有

$$i(e_j)\omega = f_{n+j},\ i(e_{n+j})\omega = -f_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

从而利用 (1.1) 和 (1.2) 两式有

$$\begin{aligned}[X,Y] &= Y\circ X - X\circ Y \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-i(e_{n+j})\circ\mu(f_{n+j}) + \mu(f_j)\circ i(e_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \mu(f_j)\circ i(e_j) - n\cdot id.\end{aligned}$$

其中 id 表示单位映射. 因为 $A(V)$ 的自同态

$$\sum_{j=1}^{2n} \mu(f_j)\circ i(e_j)$$

是 $A(V)$ 的零级导子,容易知道它在 $A(V)$ 上为恒等变换,从而它限制在 $A^p(V)$ 上等于 $p\cdot id$. 若令

$$H = [Y,X],$$

则对任意的 $\alpha\in A^p(V)$ 有

$$H(\alpha) = (p-n)\alpha.$$

3.2 **命题.** 定义从 $sl(2,k)$ 到 $A(V)$ 的自同态空间内的线性映射 ρ 使

$$\rho\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = X,\ \rho\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} = Y,\ \rho\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = H,$$

则 ρ 是 Lie 代数 $sl(2,k)$ 在空间 $A(V)$ 上的一个线性表示.

证. 事实上,根据定义, $[Y,X]=H$. 又 H 是 $A(V)$ 的零级导子,而 X 和 Y 则分别是 $A(V)$ 的 2 级和 -2 级的导子,直接计算便得到

$$[H,X] = 2X,\quad [H,Y] = -2Y,$$

因此 ρ 是 $sl(2,k)$ 的一个表示. 证完.

H 在 $A(V)$ 里的特征向量显然是 $A(V)$ 的齐次元素. 特别地,我们把含于 $\mathrm{Ker}X\backslash(0)$ 中的 H 的特征向量称为表示 ρ 的素元素(参看文献[13]). 根据 Lie 代数的表示理论,若 $\varphi\in A(V)$ 而且 φ 是一素元素, $H(\varphi)=r\varphi$, 那么 r 是一 $\geqslant 0$ 的整数,而下列元素:

$$\varphi, Y(\varphi), \cdots, Y^r(\varphi)$$

构成 $A(V)$ 的一个 $sl(2, k)$ 单子模的基. 因为由

$$H(\varphi) = r\varphi$$

知道 $\varphi \in A^{n+r}(V)$, 所以所有素元素的级数 $\geqslant n$. 由于 KerX 是由素元素所生成的 $A(V)$ 的子空间, 所以 KerX 包含在 $A^n(V) + A^{n+1}(V) + \cdots + A^{2n}(V)$ 中.

例. 1) 设 ω^n 是 ω 的 n 次外积幂, 则 $\omega^n \neq 0$, $\omega^n \in A^{2n}(V)$ 且 ω^n 是一素元素, 在表示 ρ 下, 它生成一个 $n+1$ 维 $sl(2, k)$ 子模

$$k + k\omega + \cdots + k\omega^n.$$

2) 因为 X 是 -2 级导子, 所以 $A^{2n-1}(V)$ 的任一非零元素都是素元素. 每一个这样的素元素都生成一个 n 维子模.

3.3. **命题.** 对于 $r = 0, 1, \cdots, n$, 我们有

i) X^r 把 $A^{n-r}(V)$ 同构地映到 $A^{n+r}(V)$ 上;

ii) Y^r 把 $A^{n+r}(V)$ 同构地映到 $A^{n+r}(V)$ 上.

证. 这是 Lie 代数表示理论的直接结果 (参看文献 [31]), 也可参看文献[27].

习题. 试证明子空间

$$\mathrm{Ker}X \cap A^{n+r}(V)$$

的维数是

$$\binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r+2}.$$

注. 在本书中, 我们假定读者具有 Lie 代数, Lie 群及表示理论的基础知识, 读者可参看文献 [13] 和 [31].

§4. 辛　　群

设 (V_1, ω_1) 和 (V_2, ω_2) 是域 k 上的两个辛空间. 设 φ 是从 V_1 到 V_2 上的一个向量空间的同构, 若 φ 满足 $\omega_1 = A(\varphi)\omega_2$, 则称它为从 (V_1, ω_1) 到 (V_2, ω_2) 上的一个同构.

(V_1, ω_1) 和 (V_2, ω_2) 之间存在同构的充要条件是 $\dim V_1 =$

$\dim V_2$. 事实上,若 V_1 和 V_2 都是 $2n$ 维的,设 $e_1,\cdots,e_{2n}$ (或 e_1', $\cdots,e_{2n}'$) 为 V_1 (或 V_2) 的一组辛基,则由

$$\varphi(e_i)=e_i',\quad i=1,\cdots,2n,$$

所定义的映射 φ: $V_1\to V_2$ 就是从 (V_1,ω_1) 到 (V_2,ω_2) 上的一个同构. 而必要性是显然的.

设 (V,ω) 是一辛空间,所谓 (V,ω) 的一个自同构,指的是从 (V,ω) 到其自身上的一个同构,所以 (V,ω) 的一个自同构是 V 的线性变换群 $Gl(V)$ 的一个元素,若把它记为 s,则它满足下式:

$$\omega(sx,sy)=\omega(x,y),\quad \forall x,y\in V.$$

易知 (V,ω) 的自同构全体构成群 $Gl(V)$ 的一个子群,我们把它记为 $Sp(V,\omega)$. 特别,标准辛空间 (k^{2n},ω) 的自同构群记为 $Sp(2n,k)$. 若 $k=R$,则把 $Sp(2n,k)$ 简记为 $Sp(2n)$ 并称它为 $2n$ 维**辛群**.

设 $e_1,\cdots,e_{2n}$ 是 (V,ω) 的一组辛基. 设矩阵 $S\in Gl(2n,k)$,则 S 为 (V,ω) 的某一自同构在基 $e_1,\cdots,e_{2n}$ 下的矩阵的充要条件是

$${}^tSJ_{2n}S=J_{2n},$$

其中 ${}^tS$ 是 S 的转置矩阵,J_{2n} 是 ω 在基 $e_1,\cdots,e_{2n}$ 下的矩阵,即

$$J_{2n}=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}.$$

设 $S\in Gl(2n,k)$ 并设

$$S=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中 A,B,C,D 都是 $n\times n$ 矩阵,则 $S\in Sp(2n,k)$ 的充分必要条件是

$$\begin{aligned}&{}^tCA-{}^tAC=0,\quad {}^tCB-{}^tAD=I_n,\\ &{}^tDA-{}^tBC=-I_n,\quad {}^tDB-{}^tBD=0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

因为 $\det J_{2n}=1$,所以若 $S\in Sp(2n,k)$,则由等式

$${}^tSJ_{2n}S = J_{2n}$$

可得 $(\det S)^2 = 1$. 更确切些,我们有

4.2. **命题**. 设 (V, ω) 是一辛空间,则对任一 $s \in Sp(V, \omega)$,我们有 $\det(s) = 1$.

证. 事实上,若设 $\dim V = 2n$, 则因为

$$A(s)\omega = \omega,$$

所以我们有

$$A(s)\omega^n = \omega^n.$$

因为 $\omega^n \in A^{2n}(V)$, 所以

$$A(s)\omega^n = \det(s)\omega^n.$$

若 V 是特征等于 0 的域 k 上的向量空间, 则我们有 $\omega^n \neq 0$ (命题 1.9 的推论 3), 从而 $\det(s) = 1$. 而对一般情形, 则可用"除幂 $\omega^{[n]}$"(la puissance diviée $\omega^{[n]}$)代替 ω^n 加以讨论, 注意到 $\omega^{[n]}$ 仍然是 $A^{2n}(V)$ 的一个基便可. 证完.

设 T 是一不定元. 我们以 $k[T]$ 来表示 k 上的以 T 为不定元的一元多项式环.

4.3 **命题**. 设 (V, ω) 是一个 $2n$ 维的辛空间, $s \in Sp(V, \omega)$. 若 $P \in k[T]$ 是 s 的特征多项式,则我们有

$$T^{2n}P\left(\frac{1}{T}\right) = P(T).$$

证. 事实上, 简记 $J_{2n} = J$, $I_{2n} = I$, 则 $J^2 = -I$. 若 S 是 s 在 V 的某一组辛基下的矩阵, 则因为 ${}^tSJS = J$, 从而有 ${}^tS = -JS^{-1}J$. 于是有

$$\begin{aligned} P(T) &= \det(S - TI) = \det({}^tS - TI) \\ &= \det(-JS^{-1}J - TI) = \det(S^{-1} - TI). \end{aligned}$$

又因为 $\det(S) = 1$, 所以有

$$\begin{aligned} P(T) &= \det(S)\det(S^{-1} - TI) \\ &= \det(I - TS) = T^{2n}P\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

证完.

设 L 是辛空间 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, 则对任意的

$s \in Sp(V, \omega)$，$s(L)$ 显然是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间．可见 $Sp(V, \omega)$ 作用于 (V, ω) 的所有的 Lagrange 子空间所成的集合上．

4.4．**命题**．群 $Sp(V, \omega)$ 可递地作用于由所有的 $(L, \hat{L})$ 所构成的集合上，这里 L 和 $\hat{L}$ 是 (V, ω) 中任意的两个互为 Lagrange 补的 Lagrange子空间．

证．事实上，根据命题 2.2，对于任意一个 Lagrange 互补对 $(L, \hat{L})$，存在 (V, ω) 的一组辛基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 使得 $e_1, \cdots, e_n$ 为 L 的一组基而 $e_{n+1}, \cdots, e_{2n}$ 为 $\hat{L}$ 的一组基．又因为 $Sp(V, \omega)$ 在 (V, ω) 的所有辛基所构成的集合上的作用是可递的，所以命题得证．证完．

设 L 是辛空间 (V, ω) 的任意一个 Lagrange 子空间，我们用 $S(L)$ 来表示 L 在 $Sp(V, \omega)$ 中的稳定子．

4.5．**命题**．设 L 和 $\hat{L}(V, \omega)$ 中任意的两个互为 Lagrange 补的 Lagrange 子空间，则从 $S(L)$ 到 $Gl(L)$ 内的映射

$$s \longmapsto s|L$$

诱导出从 $S(L) \cap S(\hat{L})$ 到 $Gl(L)$ 上的一个同构．

证．事实上，取 (V, ω) 的一组辛基使得 $e_1, \cdots, e_n$ 是 L 的基而 $e_{n+1}, \cdots, e_{2n}$ 是 $\hat{L}$ 的基，利用关系式 (4.1)，可知 $S(L) \cap S(\hat{L})$ 是 $Gl(V)$ 中这样一些元素的集合，它们在基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 下的矩阵有形状

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $A \in Gl(n, k)$ 是 s 在 L 上的限制 $s|L$ 所对应的矩阵，于是知命题成立．证完．

推论．设 $S(L)_0$ 是从 $S(L)$ 到 $Gl(L)$ 上的同态映射

$$s \longmapsto s|L$$

的核，则群 $S(L)$ 是正规子群 $S(L)_0$ 和子群 $S(L) \cap S(\hat{L})$ 的半直积．又群 $S(L)_0$ 单可递地作用于 (V, ω) 的所有的 L 的 Lagrange 补子空间所构成的集合上．

下面我们来确定 $S(L)_0$ 的结构. 记 q 为从 V 到 V/L 上的标准映射，记 $B(V/L)$ 为 V/L 上的对称双线性型所构成的空间. 因为 ω 的秩等于 V 的维数，所以对任一 $b\in B(V/L)$，存在 V 的唯一的一个自同态 $\tilde{b}$ 使得

(4.2) $\omega(\tilde{b}(x), y)=b(q(x), q(y))$

对任意的 $x, y\in V$ 都成立.

4.6. **命题.** 映射

$$b\longmapsto id_V+\tilde{b}$$

是从加法群 $B(V/L)$ 到 $Sp(V, \omega)$ 的子群 $S(L)_0$ 上的一个同构.

证. 对任意的 $b\in B(V/L)$，我们有 $\tilde{b}(L)=(0)$，这里 $\tilde{b}$ 由 (4.2) 式所定义. 又因为 $\tilde{b}(V)\subset L^{\perp}=L$，从而 $\tilde{b}^2=0$. 于是映射 $b\longmapsto id_V+\tilde{b}$ 是从加法群 $B(V/L)$ 到群 $Gl(V)$ 内的同态. 这个同态是一内射. 这是因为 $q: V\longrightarrow V/L$ 是满射，若 $\tilde{b}=0$，则有 $b=0$. 对任意的 $b\in B(V/L)$ 和任意的 $x, y\in V$，因为 $\omega(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y))=0$，所以

$$\begin{aligned}&\omega(x+\tilde{b}(x), y+\tilde{b}(y))\\&=\omega(x, y)+\omega(\tilde{b}(x), y)+\omega(x, \tilde{b}(y))\\&=\omega(x, y)+b(q(x), q(y))-b(q(y), q(x))\\&=\omega(x, y).\end{aligned}$$

于是 $id_V+\tilde{b}\in Sp(V, \omega)$. 因为 $\tilde{b}(L)=(0)$，所以

$$id_V+\tilde{b}\in S(L)_0, \quad \forall b\in B(V/L).$$

现若 $s\in Sp(L)_0$，我们在 V 上定义一双线性型如下:

$$(x, y)\longmapsto\omega(s(x)-x, y)=\omega(x, s^{-1}(y)-y), \forall x, y\in V.$$

若 x, y 中至少有一个属于 L，则显然有 $(x, y)=0$. 所以对任意的 $y\in V$，我们有

$$S(y)-y=s^{-1}(s(y)-y)=y-s^{-1}(y).$$

于是知双线性型 $(x, y)\longmapsto\omega(s(x)-x, y)$ 是对称的. 因为它的核含 L，所以存在 $b\in B(V/L)$ 使

$$\omega(s(x)-x, y)=b(q(x), q(y)), \forall x, y\in V.$$

于是我们有 $s=id_V+\tilde{b}$，于是同态 $b\longmapsto id_V+\tilde{b}$ 的象是

$S(L)_0$。证完。

由命题 4.5 和命题 4.6，我们得到一个标准正合列

$$(0)\longrightarrow B(V/L)\longrightarrow S(L)\longrightarrow Gl(L)\longrightarrow(1).$$

从上面我们还知道群 $S(L)$ 同构于具有下列形状的矩阵所构成的线性群：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $A\in Gl(n,k)$，而 B 则是 $n\times n$ 阶对称矩阵. 该矩阵线性群是一 $n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维的线性群.

设(V,ω)是一辛空间，则(V,ω)的所有 Lagrange 子空间所构成的集合是 V 的 n 维平面 Grassman 流形的一个子流形（设 $\dim V=2n$），我们把它记为 $\mathscr{L}(V,\omega)$. 设 L 是 (V,ω) 的一个 Lagrange 子空间，则由 L 的所有 Lagrange 补空间构成的集合是 $\mathscr{L}(V,\omega)$ 的一个开的 Zariski. 由命题 4.5 的推论和命题 4.6，可知这个开集有一仿射空间结构，它的仿射变换群同构于 $B(V/L)$，而因为 $B(V/L)$ 的维数是 $\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $\mathscr{L}(V,\omega)$ 是一 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维的流形. 而群 $Sp(V,\omega)$ 则是一维数为 $\dim\mathscr{L}(V,\omega)+\dim S(L)=n(n+1)+n^2=2n^2+n$ 的线性代数群.

设 (V,ω) 为一辛空间，我们用 $sp(V,\omega)$ 来表示 V 的自同态空间 $gl(V)$ 中所有满足

$$\omega(\alpha(x),y)+\omega(x,\alpha(y))=0,\quad \forall x,y\in V,$$

的 α 所构成的子空间.

4.7. **命题**. 映射：

$$\alpha\longmapsto(id_V-\alpha)(id_V+\alpha)^{-1}$$

是从 $sp(V,\omega)$ 中所有使 $id_V+\alpha$ 可逆的元素 α 所构成的集合到 $Sp(V,\omega)$ 中所有使 id_V+s 为可逆的 s 所构成的集合上的一个双射.

证. 令 $id_V=I$，则对任一 $\alpha\in sp(V,\omega)$，等式

$$\omega((I+\alpha)(x),\ (I+\alpha)(y)) = \omega((I-\alpha)(x),(I-\alpha)(y))$$
对任意的 $x, y \in V$ 成立. 于是,若 $I+\alpha$ 可逆,则等式
$$\omega((I-\alpha)(I+\alpha)^{-1}(x),\ (I-\alpha)(I+\alpha)^{-1}(y)) = \omega(x, y)$$
对任意的 $x, y \in V$ 成立. 从而知
$$s = (I-\alpha)(I+\alpha)^{-1} \in Sp(V, \omega).$$
又因为
$$I + s = (I+\alpha)(I+\alpha)^{-1} + (I-\alpha)(I+\alpha)^{-1} = 2(I+\alpha)^{-1},$$
所以 $I+s$ 可逆.

反之,若 $s \in Sp(V, \omega)$ 使 $I+s$ 可逆,令
$$\alpha = (I+s)^{-1}(I-s),$$
则对任意的 $x, y \in V$ 有
$$\begin{aligned}&\omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y))\\ &= -2\omega(x, y) + 2\omega((I+s)^{-1}(x), y) + 2\omega(x,(I+s)^{-1}(y)).\end{aligned}$$
令
$$x_1 = (I+s)^{-1}x, \quad y_1 = (I+s)^{-1}y,$$
由上式得
$$\begin{aligned}&\omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y))\\ &= -2\omega((I+s)(x_1),\ (I+s)(y_1)) + 2\omega(x_1,\ (I+s)(y_1))\\ &\quad + 2\omega((I+s)(x_1),\ y_1)\\ &= 0.\end{aligned}$$
所以 $\alpha = (I+s)^{-1}(I-s) \in sp(V, \omega)$. 又因
$$\begin{aligned}I + \alpha &= (I+s)^{-1}(I+s) + (I+s)^{-1}(I-s)\\ &= 2(I+s)^{-1},\end{aligned}$$
所以 $I+\alpha$ 可逆而且 $s = (I-\alpha)(I+\alpha)^{-1}$. 于是映射
$$s \longmapsto (I+s)^{-1}(I-s)$$
是映射
$$\alpha \longmapsto (I-\alpha)(I+\alpha)^{-1}$$
的逆. 证完.

命题 4.7 中的双射: $\alpha \longmapsto (I-\alpha)(I+\alpha)^{-1}$ 称为 Cayley 参数化(参看文献[30]).

注. 若 $\alpha, \beta \in sp(V, \omega)$, 则

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha \in sp(V, \omega).$$

若利用上式在 $sp(V, \omega)$ 上定义一括号运算, 则 $sp(V, \omega)$ 便成为 $Sp(V, \omega)$ 的 Lie 代数. 若 $k = R$ 或者 $k = C$, 则指数映射

$$\alpha \longmapsto \exp\alpha$$

把 $sp(V, \omega)$ 映入 $Sp(V, \omega)$ 中(参看文献[12]).

§5. 辛复结构

在本节中, 假定 (V, ω) 是 R 上的 $2n$ 维辛空间. 因为 V 是一偶数维的向量空间, 所以在 V 上存在复结构, 即存在 V 的一个自同态 j 满足 $j^2 = -id_V$. 设 j 是 V 的一个复结构, 如果 $j \in Sp(V, \omega)$, 则我们称 j 为一辛复结构. 于是, 若 j 是一辛复结构, 则对任意 $x, y \in V$ 有

$$\omega(j(x), j(y)) = \omega(x, y).$$

并且有

$$\omega(x, j(y)) = \omega(j(x), -y) = \omega(y, j(x)).$$

于是

$$(x, y) = \omega(x, j(y)), \forall x, y \in V,$$

是 V 上的一个对称双线性型. 显然, 该双线性型是非退化的. 对 $\lambda + i\mu \in C$ 和 $x \in V$, 利用等式

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu j(x)$$

把 V 定义成为 C 上的向量空间, 则复值实线性型

$$h(x, y) = \omega(x, j(y)) - i\omega(x, y), \quad x, y \in V,$$

是 V 上的伪 Hermite 型. 事实上, 对任意的 $x, y \in V$, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \overline{h(y, x)}, \\ h(ix, y) &= h(j(x), y) \\ &= \omega(j(x), j(y)) - i\omega(j(x), y) \\ &= \omega(x, y) + i\omega(x, j(y)) = ih(x, y). \end{aligned}$$

5.1. **定义.** 辛空间(V, ω)上的一个复结构 j 称为适应的(adaptée)，若它是辛的并且由它所定义的对称双线性型 $(x, y) = \omega(x, j(y))$ 是正定的.

根据定义,一个复结构 j 是一适应复结构相当于

$$(x, y) \longmapsto h(x, y) = \omega(x, j(y)) - i\omega(x, y)$$

是一 Hermite 型.

5.2. **命题.** 设 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 是辛空间(V, ω)的一组辛基，j 是 V 上的复结构使对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $j(e_i) = e_{n+i}$，则 j 是一适应复结构. 反之,若 j 是(V, ω)上的一个适应复结构，则存在(V, ω)的一组辛基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 使 $j(e_i) = e_{n+i}$，$1 \leqslant i \leqslant n$.

证. 事实上,若 $j(e_i) = e_{n+i}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则我们有 $j(e_{n+i}) = -e_i$，从而 j 在辛基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 下的矩阵是

$$-J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由 §4 知 j 是辛的. 又因为在基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 下,对称双线性型 $\omega(x, j(y))$ 的矩阵是 $-(J_{2n})^2 = I_{2n}$，因此是正定的,即 j 是适应复结构. 反之,设 j 是(V, ω)上的一个适应复结构. 设 L 为(V, ω)的一个 Lagrange 子空间，$e_1, \cdots, e_n$ 是 L 的这样一组基，它们对于双线性型 $(x, y) \longmapsto \omega(x, j(y))$ 是正交基，令 $e_{n+i} = j(e_i)$，$i = 1, \cdots, n$，则 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 是(V, ω)的一组辛基. 证完.

5.3. **命题.** 设 j 是(V, ω)上的一个适应复结构,则我们有

(i) 对(V, ω)的任意一个 Lagrange 子空间 L，$j(L)$ 是 L 的一个 Lagrange 补子空间;

(ii) V 的任一复子空间(即在 j 的作用下不变的子空间)都是辛子空间.

证. 因为 $j \in Sp(V, \omega)$，所以 $j(L)$ 是 Lagrange 子空间，若 $x, y \in L$，则我们有

$$\omega(x, j(j(y))) = -\omega(x, y) = 0,$$

从而 $j(L)$ 对于双线性型 $(x, y) \longmapsto \omega(x, j(y))$ 与 L 正交. 因

为该双线性型是正定的，所以我们有 $L\cap j(L)=(0)$，因此 $j(L)$ 是 L 的 Lagrange 补，(i) 得证. 现若 E 是 V 的一个复子空间，$x\in E\cap E^{\perp}$，则由于 $j(x)\in E$，所以 $\omega(x,j(x))=0$，于是有 $x=0$. 因此 $E\cap E^{\perp}=(0)$. 这说明 E 是一辛子空间. 证完.

5.4. **引理.** 设 j 为辛空间 (V,ω) 的一个辛复结构，$s\in Gl(V)$，则下列条件等价:

(i) $s\circ j=j\circ s$ 而且对任意的 $x,y\in V$ 有 $\omega(s(x),s(y))=\omega(x,y)$,

(ii) $s\circ j=j\circ s$ 而且对任意的 $x,\ y\in V$ 有 $\omega(x,j(y))=\omega(s(x),j(s(y)))$,

(iii) $\omega(s(x),s(y))=\omega(x,y)$ 而且对任意的 $x,y\in V$ 有 $\omega(s(x),j(s(y)))=\omega(x,j(y))$.

证. 从 (i) 推 (ii) 和从 (ii) 推 (iii) 都是显然的. 若 (iii) 成立，则

$$\omega(s(x),s(j(y))-j(s(y)))=0$$

对任意的 $x,y\in V$ 成立. 因此 $s\circ j=j\circ s$. 因此可由 (iii) 推出 (i). 证完.

引理 5.4 中的条件 (i) 等于说 $s\in Gl_C(V)\cap Sp(V,\omega)$，条件 (ii) 等于说 $s\in Gl_C(V)\cap O(V,b)$，这里 $O(V,b)$ 代表 V 的对于对称双线性型 $b(x,y)=\omega(x,j(y))$ 的正交变换群，而 (iii) 则等于说 s 保持 Hermite 型 $h=b-i\omega$ 不变.

如果 (V,ω) 就是标准辛空间 (R^{2n},ω)，而 j 则是由矩阵 $-J_{2n}$ 所定义的复结构，则 b 是 Euclid 线性型

$$b(e_i,e_j)=\delta_{ij},\ i,j=1,\cdots,2n,$$

而 h 则是标准的 Hermite 型

$$h(e_i,e_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,n.$$

于是我们有下面的命题

5.5. **命题.**

$$Sp(2n)\cap Gl(n,C)=O(2n)\cap Gl(n,C)=U(n),$$

其中 $O(2n)$ 表示正交群，$U(n)$ 表示酉群.

5.6. 推论. 酉群 $U(n)$ 是 $Sp(2n)$ 的一个极大紧子群.

证. 设 G 是 $Sp(2n)$ 的一个紧子群且设 $G\supset U(n)$. 设 b 为 R^{2n} 上的 Euclid 线性型. 由于 G 紧, 所以在 R^{2n} 上存在一个在 G 的作用下不变的正定对称双线性型 $\tilde{b}$ (参看文献 [5]). 不难知道, 可以选取 $\lambda\in R$ 使 $b-\lambda\tilde{b}$ 的秩 $<2n$. 因为 $U(n)\subset O(2n)$, 所以 $b-\lambda\tilde{b}$ 的核是 $U(n)$ 的非零不变子空间. 又因为 $U(n)$ 在酉向量集上可递, 所以 $\mathrm{Ker}(b-\lambda\tilde{b})=R^{2n}$, 也即 $b=\lambda\tilde{b}$ 并且 $G\subset Sp(2n)\cap O(2n)=U(n)$. 所以 $G=U(n)$. 证完.

习题. 设 $S=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ 是 $Sp(2n)$ 的一个元素, 其中 A, B, C, D 都是 $n\times n$ 矩阵. 令 P 为所有的这样的 $n\times n$ 复系数矩阵 Z 的集合, Z 对称并且 $\frac{1}{2i}(Z-\bar{Z})$ 是正定的. 证明若 $Z\in P$, 则 $CZ+D$ 可逆. 证明映射

$$(S, Z)\longmapsto(AZ+B)(CZ+D)^{-1},\ S\in Sp(2n).$$

定义了群 $Sp(2n)$ 在 P 上的一个作用, 即对任意的 $S\in Sp(2n)$ 和 $Z\in P$ 有

$$(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\in P.$$

证明该作用是可递的并求出 $iI_n\in P$ 的稳定子 (参看文献 [22]).

第二章　辛　流　形

在本章及以后各章里，"可微"指的是"C^∞ 可微"，"流形"指的是 C^∞ 可微实流形，而"微分形式"及"向量场"则分别指外微分形式和 C^∞ 向量场。

设 M 是一个流形，我们以 $\Omega^p(M)$ 来表示 M 上的微分 p-形式所构成的空间，而以 $\Omega(M)$ 来表示分级代数

$$\bigoplus_{p\geq 0} \Omega^p(M).$$

对于 M 上的一个向量场 X，我们可以在 $\Omega(M)$ 上定义两个很重要的算子：通过 X 的内积，记为 $i(X)$，以及 Lie 导子 $\theta(X)$。$i(X)$ 的定义见第一章，而 $\theta(X)$ 则可用下式来定义：

$$\theta(X) = d\circ i(X) + i(X)\circ d,$$

其中 d 是 $\Omega(M)$ 的外微分算子。对 $i(X)$ 和 $\theta(X)$，我们有下列关系式（参看文献 [12]）：

$$\begin{aligned}
&\theta([X, Y]) = \theta(X)\circ\theta(Y) - \theta(Y)\circ\theta(X),\\
&i([X,Y]) = \theta(X)\circ i(Y) - i(Y)\circ\theta(X),\\
&i(X)\circ i(Y) + i(Y)\circ i(X) = 0.
\end{aligned}$$

其中 X 和 Y 都是 M 上的向量场。从定义可知 Lie 导子 $\theta(X)$ 是分级代数 $\Omega(M)$ 的 0 级导子，内积 $i(X)$ 是 -1 级的 Z_2- 导子.

设 N 是流形 M 的一个子流形，$\alpha\in\Omega^p(M)$.我们记 $\alpha|_N$ 为 α 在 $\Omega^p(N)$ 中的拉回（pull back）。

§ 6.　流形上的辛结构

6.1. **定义.** 设微分形式 $\omega\in\Omega^2(M)$，若 ω 满足下面的两个条件：

(1) 对任一 $x\in M$，ω_x 都是点 x 处的切向量空间 T_xM 的一

个辛结构，

(2) $d\omega=0$，

则称它为流形M上的一个辛结构，并且称(M,ω)为辛流形。

设(M_1,ω_1)和(M_2,ω_2)是两个辛流形，

$$\varphi: M_1 \to M_2$$

是一可微映射．若φ满足条件

(6.2) $\quad \omega_1=\varphi^*(\omega_2)$，

则我们称φ为从(M_1,ω_1)到(M_2,ω_2)内的一个辛流形同态．而从(M_1,ω_1)到(M_2,ω_2)上的一个辛流形同构，则是满足条件(6.2)的一个从M_1到M_2上的微分同胚．

若

$$\varphi:(M_1,\omega_1)\to(M_2,\omega_2)$$

是一辛流形同态，则对任一$x\in M_1$，φ在x点的微分是辛向量空间之间的一个同态

$$\varphi_x^T:(T_xM_1,(\omega_1)_x)\to(T_{\varphi(x)}M_2,(\omega_2)_{\varphi(x)}).$$

因此，所有的辛流形同态都是浸入映射．

基本性质． 设(M,ω)是一辛流形，则我们有：

(a) M的维数是偶数．

(b) M是可定向的．若设$\dim M=2n$，则n阶外积幂ω^n就是M上的一个体积元素．

(c) 若$v\in T_xM$，则$i(v)\omega_x\in T_x^*(M)$．由映射

$$v\longmapsto i(v)\omega_x,\quad v\in T_x(M),$$

可定义从切丛TM到余切丛T^*M上的一个标准同构．同样，把M上的向量场X映为1-形式$i(X)\omega$的映射是从向量场模到1-形式模上的标准同构．

(d) M上所有的一阶标架所构成的纤维丛含有一个由结构群$Sp(2n)$所决定的子丛，这个子丛由辛标架构成，所谓辛标架，指的是满足$A(\xi)\omega_x=\underline{\omega}$的标架$\xi: R^{2n}\to T_xM$，其中$\underline{\omega}$是$R^{2n}$上的标准辛形式（参看§2）．

(e) 若M是紧流形，则对$i=0,1,\cdots,n$，上同调空间

(de Rham) $H^{2i}(M, R)$ 均非零. 事实上,形式 ω^i 所对应的上同调类 $[\omega^i]=[\omega]^i\in H^{2i}(M,R)$. 由于 ω^n 是体积元素,所以 $[\omega^n]\neq 0$,故知 $[\omega^i]\neq 0$. 从而也就可以知道维数 $\neq 2$ 的球没有辛结构. 我们可以在同胚于 2 维球的投影空间 CP^1 上定义一辛结构.

注. 设 (M, ω) 是一 $2n$ 维的辛流形,则对任意的 $\lambda\in R^+$, $\lambda\omega$ 都是M上的辛结构. 若M紧而且 $|\lambda|\neq 1$,则辛流形 (M, ω) 和 $(M, \lambda\omega)$ 是不同构的,这是因为

$$\left|\int_M \omega^n\right| \neq \left|\int_M (\lambda M)^n\right|.$$

例 1. 设 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 是 R^{2n} 上的自然坐标,则 2-形式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dx_i\wedge dx_{n+i}$$

是流形 R^{2n} 上的一个辛结构,我们称它为 R^{2n} 上的标准辛结构.

例 2. 设G是由 R^{2n} 上这样一些仿射变换 f 所构成的群,这些 f 的线性部分属于 $Sp(2n)$,则G含平移变换,是辛流形 (R^{2n}, ω) 的可递自同构群. 若 Γ 是G的一个离散子群,而且它在 R^{2n} 上的作用是自由作用,则 $R^{2n}\backslash\Gamma$ 是一流形,而且在 $R^{2n}\backslash\Gamma$ 上存在唯一的辛结构使得标准映射

$$R^{2n}\to R^{2n}\backslash\Gamma$$

是一辛流形同态. 若取Γ为整平移群 Z^{2n},则可以在环面 $R^{2n}\backslash Z^{2n}$ 上定义一辛结构使该辛结构对于 R^{2n} 在 $R^{2n}\backslash Z^{2n}$ 上的自然作用是不变的.

例 3. 设 (M, ω) 是一辛流形,

$$\pi: \widetilde{M}\to M$$

是M的一个覆盖,则 $(\widetilde{M}, \pi^*(\omega))$ 是辛流形而且 π 是辛流形同态.

例 4. 设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个辛流形. 设

$$pr_i: M_1\times M_2\to M_i,\ i=1, 2,$$

是标准投影,则 $pr_1^*(\omega_1)+pr_2^*(\omega_2)$ 是 $M_1\times M_2$ 上的一个辛结构. 我们称辛流形

$$(M_1 \times M_2, pr_1^*(\omega_1) + pr_2(\omega_2))$$

为辛流形 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 的积,并把它记为

$$(M_1, \omega_1) \times (M_2, \omega_2).$$

Kähler 结构. 设M是一$2n$维流形, J是M上的一个复结构,则作为M上的张量, J是(1,1)型的. 所以我们可把它看作M上的向量场模的一个自同态. J满足下列条件:

(1) $J^2 = -id$,

(2) $J[X,Y] = [JX,Y] + [X,JY] + J[JX,JY]$,

其中 X, Y 是M上的任意的两个向量场.

设g是M上的微分对称 2-形式并且

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

对M上任意的向量场 X, Y 成立. 令

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y),$$

则 $\omega \in \Omega^2(M)$.

若g在M的任意一点处的秩都是$2n$, 即g是伪 Riemann 形式,则对任意的 $x \in M$, ω_x 都是向量空间 T_xM 上的辛形式而且 J_x 是 (T_xM, ω_x) 上的辛复结构. 形式 $h = g - i\omega$ 是M上的一个伪 Hermite 形式. 若还有 $d\omega = 0$, 则ω是M上的一个辛结构,并且我们称h为伪 Kähler 形式. 最后, 若 $d\omega = 0$ 并且g在M的任意一点处的切空间都是正定的,则h称为M上的一个 Kähler 形式. 若h是一 Kähler 形式,则对任一 $x \in M$, J_x 都是 (T_xM, ω_x) 上的一个适应复结构.

若h是复流形M上的一个 Kähler 形式,则对M的任意一个复子流形N, h在N上的拉回都是N上的一个 Kähler 形式. 特别, M 的所有复子流形都具有诱导的辛结构.

例 5. 设 CP^n 是由 C^{n+1} 中所有的复直线所构成的复投影空间. 任意一点 $D \in CP^n$ 处的切向量空间可以等同于复线性映射空间

$$\mathscr{L}_C(D, C^{n+1}/D).$$

若η为 C^{n+1} 上的标准 Hermite 形式,即

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i,$$

其中 $z_1, \cdots, z_{n+1}$ 是 C^{n+1} 上的自然坐标. 令 $D^\perp$ 为 D 在 C^{n+1} 中对于 η 的正交超平面,则可以把 D 点的切空间等同于复向量空间 $\mathscr{L}_C(D, D^\perp)$. 于是对任意的 $D \in CP^n$, 我们可以在 $T_D CP^n$ 上定义一 Hermite 形式如下:

$$\eta_D(\varphi, \phi) = \frac{\eta(\varphi(u), \phi(u))}{\eta(u, u)},$$

其中 $\varphi, \phi \in \mathscr{L}_C(D, D^\perp)$, $u \in D \backslash (0)$. 设 p 是从 $U = C^{n+1} \backslash (0)$ 到 CP^n 上的标准映射

$$u \longmapsto Cu.$$

利用下式把切从 TU 等同于 $U \times C^{n+1}$:

$$(u, v) = \frac{d}{dt}(u + tv)|_{t=0}, \quad u \in U, v \in C^{n+1}.$$

于是,对任意的 $(u, v) \in T_u U$, 我们可定义

$$\mathscr{L}_C(C_u, (C_u)^\perp)$$

中的一个向量 $p^T(u, v)$, 使得

$$(p^T(u, v))(u) = v - \frac{\eta(v, u)}{\eta(u, u)} u.$$

这样,对 $(u, v), (u, w) \in T_u U$ 我们有

$$\eta Cu\,(p^T(u, v), (u, w)) = \frac{\eta(u, u)\eta(v, w) - \eta(v, u)\eta(w, u)}{\eta(u, u)^2},$$

这是 U 上由下式

$$\tilde{\eta} = \frac{\left(\sum_j z_j \bar{z}_j\right)\left(\sum_j dz_j d\bar{z}_j\right) - \left(\sum_j \bar{z}_j dz_j\right)\left(\sum_j z_j d\bar{z}_j\right)}{\left(\sum z_j \bar{z}_j\right)^2}$$

所定义的 Hermite 型 $\tilde{\eta}$ 在向量对 $(u, v), (u, w)$ 上的值. 于是,对任一 $D \in CP^n$, η_D 都是 CP^n 上满足 $p^*(h) = \tilde{\eta}$ 的 Hermite 形式 η 在 D 点的值. 记 η 的虚部为 ω, 则 $p^*(\omega)$ 是 $\tilde{\eta}$ 的虚部. 令 $z_j = x_j + iy_j$, 则 $p^*(\omega)$ 就等于

$$-\frac{1}{r}\sum_j dx_j\wedge dy_j+\frac{1}{2}\frac{dr}{r^2}\wedge\sum(x_jdy_j-y_jdx_j),$$

其中 $r=\sum_i z_i\bar{z}_i$. 直接计算知 $p^*(\omega)$ 是一闭的 2-形式. 从而有

$$p^*(d\omega)=d(p^*(\omega))=0.$$

又因为 p 是子浸入，所以 $d\omega=0$. 这就证明了 η 是一 Kähler 形式而 ω 是 CP^n 上的一个辛结构.

酉群 $U(n+1)$在 CP^n 上的作用可递并且保持 Kähler 形式 h 不变. 设 $D\in CP^n$ 并设 $r_D\in U(n+1)$ 是由下面的条件所决定的反射:

$$r_D(x)=\begin{cases}-x, & x\in D,\\ x, & x\in D^\perp,\end{cases}$$

则 r_D 在 CP^n 上的作用保持点 D 不动而对任意的 $\varphi\in T_DCP^n$, $(r_D)^T\varphi=-\varphi$. 可见它是以 D 为中心点的一个"对称". 于是对 CP^n 上任一微分 p-形式 α 有

$$(r_D^*(\alpha))_D=(-1)^p\alpha_D.$$

若 p 是一奇数且 α 在 $U(n+1)$ 下不变，则

$$\alpha_D=(r_D^*(\alpha))_D=-\alpha_D$$

对所有 $D\in CP^n$ 都成立. 于是 $\alpha=0$. 这推出 CP^n 上的 $U(n+1)$不变微分形式或者是偶数阶的或者是 0，并且全都是闭的. 因为 η 是 $U(n+1)$ 不变微分形式，所以这也从另一方面证明了 η 的虚部是闭形式. 用同样的方法可以证明，所有齐性对称空间的不变微分形式都是闭的(参看文献 [12]).

注. 存在不具有 Kähler 结构的紧辛流形，Thurston 给出了一个 4 维的例子，构造的方法与例 2 类似(参看文献 [29]).

§7. 辛流形上的微分形式代数的算子

设 (M,ω) 是一 $2n$ 维的辛流形. 由辛流形的定义，对任意的

$x \in M$，(T_xM, ω_x) 都是一辛空间. 设 $\Omega_x(M)$ 是向量空间 T_xM 上的反对称形式代数. 如 §3 中所述，Lie 代数 $sl(2, R)$ 在每一 $\Omega_x(M)$ 中有一标准线性表示. 这一线性表示可由 $sl(2, R)$ 在 $\Omega(M)$ 上的一个标准线性表示通过限制在 $\Omega_x(M)$ 上得到. 下面我们就来定义 $sl(2, R)$ 在 $\Omega(M)$ 上的一个标准线性表示.

首先，对任意的 $\beta \in \Omega(M)$，定义 $\Omega(M)$ 的自同态 X 为

$$X(\beta) = \omega \wedge \beta.$$

其次，定义 $\Omega(M)$ 的自同态 H 为

$$H(\beta) = (p - n)\beta, \forall \beta \in \Omega^p(M).$$

设 $x \in M$，$e_1, \cdots, e_{2n}$ 是 (T_xM, ω_x) 的一组辛基. 我们定义 $\Omega(M)$ 的自同态 Y 使

$$(Y(\beta))_x = \sum_{j=1}^{n} i(e_j) i(e_{n+j}) \beta_x, \quad \forall \beta \in \Omega(M).$$

在局部上，Y 可表达为

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} i(E_j) i(E_j'),$$

其中 $E_1, \cdots, E_{2n}$ 和 $E_1', \cdots, E_{2n}'$ 是满足 $\omega(E_i, E_j') = \delta_{ij}$ 的两组向量场.

把 $\Omega(M)$ 看作 $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ 上的模. 容易看出，算子 X, H, Y 是模 $\Omega(M)$ 的自同态. 注意到这已经在 §3 中讨论过，所以我们有

$$\begin{aligned} &[H, X] = H \circ X - X \circ H = 2X, \\ (7.1) \quad &[H, Y] = H \circ Y - Y \circ H = -2Y, \\ &[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X = -H. \end{aligned}$$

所以算子 X, H, Y 在 $\Omega(M)$ 上定义了 Lie 代数 $sl(2, R)$ 的一个标准线性表示. 这一表示在流形的研究，尤其在 Kähler 流形的研究中起很重要的作用（参看文献 [27]）.

现设 ω 是一正合形式，即在 M 上存在 1-形式 α 使 $d\alpha = -\omega$. 我们把由 α 定义的 $\Omega(M)$ 的自同态

$$\beta \longmapsto \alpha \wedge \beta, \quad \forall \beta \in \Omega(M),$$

称为由 α 定义的左外积，并记为 $\mu(\alpha)$。利用 α，我们在 $\Omega(M)$ 上定义两个新的算子 P 和 Q 如下：

$$P = d - \mu(\alpha),$$

(7.2)

$$Q = [Y, P].$$

算子 P 和 Q 都是一阶微分算子．例如，对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $\beta \in \Omega(M)$，我们有

$$P(f\beta) = fP(\beta) + df \wedge \beta.$$

又 P 和 Q 分别是 1 级和 -1 级的导子，即有

(7.3) $P(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M)$, $Q(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p-1}(M)$.

7.4. **命题**．算子 X, Y, H, P 和 Q 满足下列关系式：

(i) $[H,P] = P$, $[H,Q] = -Q$;

(ii) $[X,P] = 0$, $[X,Q] = -P$;

(iii) $[Y,P] = Q$, $[Y,Q] = 0$;

(iv) $P^2 = X$, $Q^2 = Y$, $P \circ Q + Q \circ P = H$.

证．关系式 (i) 可直接从 (7.3) 导出．现证(ii)因为 $a\omega = 0$，所以有 $[d, X] = 0$，从而由 (7.2) 和 α 的定义有 $[X,P] = 0$．根据定义，$Q = [Y, P]$，所以我们有

$$[X, Q] = [X, [Y, P]] = [[X, Y], P] + [Y, [X, P]]$$
$$= -[H, P] = -P.$$

(ii) 得证．又因为 $d\alpha = -\omega$，所以我们有

$$d \circ \mu(\alpha) + \mu(\alpha) \circ d = -X,$$

于是

$$P^2 = (d - \mu(\alpha))^2 = X.$$

因为 $Q = [Y, P]$，所以

$$P \circ Q + Q \circ P = P \circ Y \circ P - P^2 \circ Y + Y \circ P^2 - P \circ Y \circ P$$
$$= [Y, X] = H.$$

现在只剩下证明 $[Y, Q] = 0$ 和 $Q^2 = Y$．设

$$\mathfrak{a} = RX + RY + RH$$

是由 X, Y, H 生成的空间 $\Omega(M)$ 上的自同态 Lie 代数 $gl(\Omega(M))$

的子代数，则 $\mathfrak{a}$ 同构于 $sl(2, R)$. 记 ε 为 $gl(\Omega(M))$ 中由下列元素张成的向量子空间:

$$P, ad(Y)P, \cdots, ad(Y)^r P, \cdots$$

其中 ad 是 $gl(\Omega(M))$ 的伴随表示(即 $ad(U)V=[U, V]$, $U, V \in gl(\Omega(M))$). 因为对大于 n 的正整数 r 有 $ad(Y)^r=0$, 所以空间 ε 是有限维的. 又因为对所有 $r \geqslant 0$ 有

$$ad(H)ad(Y)^r P=(2r+1)ad(Y)^r P,$$

所以 ε 在 $ad(Y)$ 和 $ad(H)$ 的作用下都不变. 又因为

$$\begin{aligned} & ad(X)ad(Y)^r-ad(Y)^r ad(X) \\ & =r(1-r)ad(Y)^{r-1}-r\ ad(H)ad(Y)^{r-1}, \end{aligned}$$

所以 ε 在 $ad(X)$ 下也不变. 因为 $ad(X)P=0$ 而且 $ad(H)P=P$, 所以 P 对于 $\mathfrak{a}$ 的由伴随表示 ad 限制在 ε 上而得到的线性表示来说，是权为 1 的素元素. 我们知道(参看文献[13]或[31]), 这时一定有 $ad(Y)^2 P=0$, 从而

$$[Y, Q]=ad(Y)Q=ad(Y)^2 P=0.$$

把 Q^2 分别写成

$$Q^2=Q\circ Y\circ P-Q\circ P\circ Y=Y\circ Q\circ P-Q\circ P\circ Y,$$

和

$$Q^2=Y\circ P\circ Q-P\circ Y\circ Q=Y\circ P\circ Q-P\circ Q\circ Y,$$

就得到 $2Q^2=[Y, H]=2Y$. 证完.

利用所谓"Lie 超代数"的概念，命题 7.4 中的关系式可用"Lie 超代数"的语言很好地表达出来. 下面我们就来定义 Lie 超代数，并且给出一些例子.

7.5. **定义**. (参看文献[14].)域 k 上的一个 Lie 超代数是 k 上的一个 Z_2-分级向量空间 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$, 和一双线性映射(称为括号)

$$[,]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

使得下面的(1)—(3)成立:

(1) $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q]\subset\mathfrak{g}_{p+q}$, $p, q\in Z_2$,

(2) $[x, y]=(-1)^{pq}[y, x]$, 对 $\forall x\in\mathfrak{g}_p, y\in\mathfrak{g}_q$,

(3) $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{pq}[y, [x, z]]$,

对$\forall x \in \mathfrak{g}_p, y \in \mathfrak{g}_q$.

例 1. 设

$$V = \bigoplus_{p \in Z} V_p$$

是一 Z-分级向量空间．记 $gl(V)_r$ 为 $gl(V)$中所有满足 $\alpha(V_p)= V_{p+r}$ 的元素 α 所构成的集合．在 Z-分级空间

$$gl(V)_* = \bigoplus_{r \in Z} gl(V)_r$$

上定义一括号如下:

$$[\alpha, \beta] = \alpha\circ\beta - (-1)^{pq}\beta\circ\alpha, \ \forall \alpha \in gl(V)_p, \ \beta \in gl(V)_q.$$

对于这样定义的括号，若将 $gl(V)_*$ 原来在 Z 中的分级按模 2 同余类重新分级，则空间 $gl(V)_*$ 就成为一 Lie 超代数。

例 2. 设

$$A = \bigoplus_{p \in Z} A_p$$

是一 Z-分级结合代数 ($A_pA_q \subset A_{p+q}$)，$gl(A)_p$ 的定义同例 1．若 $\alpha \in gl(A)_p$ 且

$$\alpha(xy) = \alpha(x)y + (-1)^{pr}x\alpha(y), \ \forall x \in A_r, \ y \in A,$$

则我们称 α 为 A 的一个 Z_2-导子． 记 $\mathrm{Der}(A)_p$ 为 $gl(A)_p$ 中所有的 Z_2-导子构成的子空间，则

$$\mathrm{Der}(A)_* = \bigoplus_{p \in Z} \mathrm{Der}(A)_p$$

是 $gl(A)_*$ 的一个 Lie 子超代数，即它是在 $gl(A)_*$ 的括号下不变的分级子空间．

例 3. 设 e_{-1}, e_0, e_1 是 R^3 的一组自然基，在 R^3 上定义一 Z-分级如下:

$$e_p \text{ 的级数} = p, \ p = -1, 0, 1.$$

设 b 是 R^3 上的双线性型，它在基 e_{-1}, e_0, e_1 下对应着矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 b 在 $Re_{-1}+Re_1$ 上的限制是辛形式而在 Re_0 上的限制则是对称正定型（称 b 为正交辛形式）. 设 $osp(2,1)$ 是 $gl(3,R)=gl(R^3)_*$ 中这样的一个 Z-分级子空间，它的 p 级元素是 $gl(3,R)_p$ 中满足

$$b(\alpha(x),y)+(-1)^{pr}b(x,\alpha(y))=0,\ \forall x\in Re_r,\ y\in R^3,$$

的元素 α，则 $osp(2,1)$ 是 $gl(3,R)$ 的一个 Lie 子超代数（比较例 1）. 它是 5 维的，而且下列元素构成它的一组基：

$$\underline{X}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \underline{H}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\underline{Y}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \underline{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\underline{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

元素 $\underline{X}$，$\underline{P}$，$\underline{H}$，$\underline{Q}$，$\underline{Y}$ 的 Z-级数分别是 2，1，0，-1，-2. $osp(2,1)$ 中由偶数级元素所张成的子空间是同构于 $sl(2,R)$ 的子代数.

现设 (M,ω) 是一辛流形，并设 X,H,Y,P,Q 是本节开头通过满足等式 $d\alpha=-\omega$ 的 α 而定义出的 $\Omega(M)$ 中的算子. 不难证明（读者可作为习题自证之），从 $osp(2,1)$ 到 $gl(\Omega(M))$ 中的映射 ρ：

$$\rho(\underline{X})=X,\ \rho(\underline{H})=H,\ \rho(\underline{Y})=Y,$$
$$\rho(\underline{P})=P,\ \rho(\underline{Q})=Q,$$

是一 Lie 超代数同态. 于是，α 的选取确定了 $osp(2,1)$ 在分级空间 $\Omega(M)$ 中的一个线性表示.

Lie 超代数 $osp(2,1)$ 与 $sl(2,R)$ 很相似（参看文献[14]和[21]）. 例如，$osp(2,1)$ 是单代数，即它不含除 (0) 和它本身以外的理想子代数. $osp(2,1)$的所有有限维线性表示都是半单的

(即完全可约的). 对任一整数 $n \geqslant 0$, 在同构意义下存在唯一的一个 $2n+1$ 维的单线性表示(不可约线性表示). 对于这个表示, H 的权是区间 $[-n, n]$ 中的所有整数. 若 $n>0$, 则表示分解为 $sl(2, R) \subset osp(2, 1)$ 的两个维数分别是 n 和 $n+1$ 的单表示的直和. 最后, 我们指出, $osp(2, 1)$ 的所有单表示的维数都是奇数.

§8. 辛 坐 标

利用 Darboux 的一个定理, 可得到这样一个结论: 两个同维数的辛流形是局部同构的. 在本节中, 我们用对维数进行归纳的方法, 给出这个结论的一个证明. Moser (参看文献 [29]) 指出了另一通过变换给出的证明, 他的结果我们将在 §11 中加以叙述.

设 M 是一流形, α 是 M 上任意的一个 p-形式. 考虑切丛 TM 中所有这样的元素 v, 它们满足条件: 若 $v \in T_xM$, 则 $i(v)\alpha_x = 0$. 这些 v 所构成的集合称为 α 的核, 记为 $\mathrm{Ker}\alpha$. 若 $\mathrm{Ker}\alpha$ 是 TM 的纤维维数是 $\dim M - r$ 的子向量丛, 则称 α 具有常秩 r.

8.1. **引理.** 设 M 是一流形, 映射

$$\varphi: M \to R^s$$

是一子浸入. 设 $\alpha \in \Omega^p(M)$. 若

$$\mathrm{Ker}\varphi^T \subset (\mathrm{Ker}\alpha) \cap (\mathrm{Ker}d\alpha),$$

则对 M 的任一点 x^0, 存在 x^0 的一个开邻域 U 和 $\Omega(\varphi(U))$ 中的一个形式 β, 使 $\alpha|U = \varphi^*(\beta)$.

证. 设 $n = \dim M$, 并设 $y_1, \cdots, y_s$ 是 R^s 的自然坐标. 令 $x_i = y_i \circ \varphi$. 因为 φ 是子浸入, 所以存在 x_0 在 M 中的一个开邻域 V 和 V 上的可微函数 $x_{s+1}, \cdots, x_n$ 使得 $x_1, \cdots, x_n$ 是 V 上的坐标系. 对于 $i = s+1, \cdots, n$, 向量场 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是 V 上纤维从 $\mathrm{Ker}\varphi^T$ 的截面. 设 $\mathfrak{S}(p, n)$ 为所有满足

$$\tau(1) < \tau(2) < \cdots < \tau(p)$$

的映射 τ

$$[1,p]\to[1,n]$$

所成的集合．并设 $\alpha|_V$ 的坐标表达式是

$$\alpha|_V=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}(p,n)} f_\tau dx_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge dx_{\tau(p)}.$$

因为对 $i>s$ 有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\alpha=0,$$

所以若 $\tau(p)>s$，则 $f_\tau=0$．于是有

$$\alpha|_V=\sum_\tau f_\tau(dy_{\tau(1)}\cdots dy_{\tau(p)}),\quad \tau\in\mathfrak{S}(p,s).$$

又因为对 $i>s$ 有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)d\alpha=0,$$

所以对所有的 $i>s$ 有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f_\tau=0.$$

于是推出，在 x_0 的某一开邻域中，设该邻域为 U，函数 f_τ 具有形式 $f_\tau=\varphi^*(g_\tau)$，这里 g_τ 是 $\varphi(U)$ 上的可微函数．令

$$\beta=\sum_\tau g_\tau dy_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge dy_{\tau(p)},\quad \tau\in\mathfrak{S}(p,s),$$

则我们有

$$\alpha|_U=\varphi^*(\beta).$$

证完．

8.2．**命题**．设M和N是两个流形，映射

$$\varphi:\ M\to N$$

是一到上的子浸入．假定 φ 的纤维是连通的．设 α 是M上的一个微分形式使得

$$\operatorname{Ker}\varphi^T=(\operatorname{Ker}\alpha)\cap(\operatorname{Ker}d\alpha),$$

则在N上存在唯一的一个微分形式 β 使得

$$\alpha=\varphi^*(\beta).$$

证．根据引理 8.1，对任一 $x\in M$，存在 x 的一个开邻域 U_x

和 $\varphi(U_x)$ 上的微分形式 β_x 使得

$$\alpha|_{U_x} = \varphi^*(\beta_x).$$

把 β_x 看作是空间 N 上的纤维丛的一个截面，则对任意的 $x, y \in M$，在 $\varphi(U_x \cap U_y)$ 上我们有 $\beta_x = \beta_y$. 又因为 φ 的纤维是连通的，于是在 $\varphi(U_x) \cap \varphi(U_y)$ 上有 $\beta_x = \beta_y$. 从而在 $\varphi(M) = N$ 上存在一个微分形式 β 使等式

$$\beta_x = \beta|_{\varphi(U_x)}$$

对所有的 $x \in M$ 都成立. 于是 $\alpha = \varphi^*(\beta)$. 又因为

$$\varphi^T: TM \to TN$$

是满射，所以上式唯一地确定了 β. 证完.

设 M 是一流形，向量丛 TM 的一个子向量丛 E 称为是**可积的**，若它是一微分流形并且对它上的任两可微截面 X, Y, $[X, Y] = X\circ Y - Y\circ X$ 都是 E 的截面.

例如，若

$$\varphi: M \to N$$

是一常秩可微映射，则子纤维丛 $\mathrm{Ker}\varphi^T \subset TM$ 便是可积的.

下面引述的 Frobenius 定理表明，在局部上，TM 的所有可积子丛都可用上面例子中的同样的方法得到. 该定理的证明读者可在任何一本关于流形的书上找到.

Frobenius 定理. 设 M 为一流形，E 是 TM 的一个可积子丛. 设 E 的纤维的维数是 r，TM 的纤维的维数是 n，则在局部上，M 上存在坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 使

$$E = \bigcap_{r<i\leq n} \mathrm{Ker}\, dx_i.$$

于是对上述的局部坐标，$\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_r}$ 在局部上是 E 的截面的一组基.

推论. 设 M 是一流形，E 是 TM 的一个可积子丛，则对任意的 $x \in M$，存在 x 在 M 中的一个开邻域 U 和子浸入

$$\varphi: U \to R^{n-r}$$

使得

$$\mathrm{Ker}\varphi^T = E \cap TU.$$

证. 这是 Frobenius 定理的直接推论. 证完.

8.3. 命题. 设M是一流形, $\alpha \in \Omega^p(M)$ 是一闭微分 p-形式, 并设 α 在M上每一点处的秩都是 r, 则对任意的 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U, 子浸入

$$\varphi: U \to R^r$$

以及 p-形式 $\beta \in \Omega^p(\varphi(U))$ 使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\beta).$$

并且, β 也是闭形式, 它在 $\varphi(U)$ 的每一点处的秩也是 r.

证. 因为 α 在M的每一点处的秩都是 r, 所以 $E = \mathrm{Ker}\alpha$ 是 TM 的一个子丛而且其纤维的维数是 $n-r$, 这里 $n = \dim M$. 因为 $E = \mathrm{Ker}\alpha$, 所以E的可微截面是M上的满足 $i(X)\alpha = 0$ 的向量场 X. 若 X, Y 是E的两个截面, 则我们有

$$\begin{aligned} i([X, Y])\alpha &= \theta(X)i(Y)\alpha + i(Y)\theta(X)\alpha \\ &= i(Y)\theta(X)\alpha \\ &= i(Y)(di(X)\alpha + i(X)d\alpha) = 0. \end{aligned}$$

所以 $[X, Y]$ 也是E的截面. 从而E是可积的. 由 Frobenius 定理的推论, 对任意的 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U_0 和子浸入 $\varphi: U_0 \to R^r$ 使得

$$\mathrm{Ker}\varphi^T = E \cap TU_0.$$

因为

$$(\mathrm{Ker}\alpha) \cap (\mathrm{Ker}d\alpha) = \mathrm{Ker}\alpha = E \supset \mathrm{Ker}\varphi^T,$$

根据引理 8.1, 存在 x 的一个含于 U_0 中的开邻域U和 $\beta \in \Omega^p(\varphi(U))$ 使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\beta).$$

又因为 φ 是子浸入并且

$$\varphi^*(d\beta) = d\varphi^*(\beta) = d\alpha = 0,$$

所以我们有 $d\beta = 0$. 因为

$$\mathrm{Ker}\beta = \varphi^T(\mathrm{Ker}\alpha|_U) = 0,$$

所以 β 的秩恒等于 r. 证完.

推论. 设 α 是流形M上在每一点处的秩都是 $2r$ 的闭 2-形

式，则对任意的 $x\in M$，存在 x 的一个开邻域 U 和子浸入

$$\varphi: U \to R^{2r},$$

以及 $\varphi(U)$ 上的一个辛结构 ω 使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\omega).$$

证. 直接应用命题 8.3 便可. 证完.

8.4. **定理 (Darboux).** 设 M 是一流形，α 是 M 上在每一点处的秩都是 $2r$ 的闭 2-形式，则对任意的 $x\in M$，存在 x 的一个开邻域 U 和 U 上的可微函数 $x_1,\cdots,x_{2r}$ 使得

$$\alpha|_U = dx_1\wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_r\wedge dx_{2r}.$$

证. 我们对 $2r+\dim M$ 进行归纳. 当 $2r+\dim M = n$ 时，结论显然成立.

下面我们把证明分作两步.

(1) 设 $2r<\dim M$. 根据命题 8.3 的推论，存在 x 的一个邻域 U_0，子浸入

$$\varphi: U_0 \to R^{2r}$$

和 $\varphi(U_0)$ 上的辛结构 ω 使得

$$\alpha|_{U_0} = \varphi^*(\omega).$$

因为

$$\dim\varphi(U) = 2r < \dim M,$$

因此我们可以假设结论在 $2r-2$ 时成立，而对 $\dim\varphi(U)=2r$，存在 $y=\varphi(x)$ 在 R^{2r} 中的一个开邻域 V 和 V 上的可微函数 $y_1,\cdots,y_{2r}$ 使得

$$\omega|_V = dy_1\wedge dy_{r+1} + \cdots + dy_r\wedge dy_{2r}.$$

令 $x_i = y_i\circ\varphi$，则得

$$\alpha|_{\varphi^{-1}(V)} = dx_1\wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_r\wedge dx_{2r}.$$

于是我们就对所有 $2r<\dim M$ 证明了结论.

(2) 设 $2r=\dim M$. 此时，α 是 M 上的一个辛结构，而映射

$$X \longmapsto i(X)\alpha$$

是从 M 上的向量场模到模 $\Omega^1(M)$ 上的一个模同构. 所以对 M 上任一可微函数 f，在 M 上存在唯一的一个向量场 H_f 使得 $i(H_f)\alpha=$

df（我们将在 §9 中仔细研究映射 $f \longmapsto H_f$）．设 f 是 x 的某一邻域上的可微函数使 $df_x \neq 0$，则在 x 的某一邻域上有 $H_f \neq 0$．我们还可以在 x 的一个充分小的开邻域 U_0 上找到一可微函数 g，使对 U_0 的任一点都有 $H_f \cdot g = 1$．现设 $\alpha' = \alpha - df \wedge dg$，则 $d\alpha' = 0$ 且

$$i(H_f)\alpha' = df - (i(H_f)i(H_f)\alpha) \wedge dg - df \wedge (i(H_f)dg) = 0.$$

于是 α' 在 U_0 上任一点处的秩都 $<2r$．另一方面，

$$\alpha^r = (\alpha')^r + r(\alpha')^{r-1} \wedge df \wedge dg = r(\alpha')^{r-1} \wedge df \wedge dg,$$

这说明在 U_0 的任一点处都有 $(\alpha')^{r-1} \neq 0$．于是 α' 在 U_0 上是常秩为 $r-1$ 的形式．由 (1) 可知在 x 的某一含于 U_0 中的开邻域 U 上存在可微函数 $x_1, \cdots, x_{r-1}$ 和 $x_{r+1}, \cdots, x_{2r-1}$ 使得

$$\alpha' = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_{r-1} \wedge dx_{2r-1}.$$

于是得知在 U 上有

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_r \wedge dx_{2r},$$

其中 $x_r = f$，$x_{2r} = g$．证完．

注．因为 α 在每一点处的秩都是 $2r$，所以函数 $x_1, \cdots, x_{2r}$ 在 U 的任意一点处都是不相关的．

8.5. **定义**．设 (M, ω) 是一 $2n$ 维辛流形，U 是 M 的一个开集．U 上的坐标 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 称为辛坐标，若

$$\omega|_U = dx_1 \wedge dx_{n+1} + \cdots + dx_n \wedge dx_{2n}.$$

由 Darboux 定理知，在 M 的每一点的一个适当的邻域上，存在局部的辛坐标．设 M 的维数是 $2n$．对 R^{2n} 中的开集，我们把它看作具有由 R^{2n} 上的标准辛结构的拉回辛结构的 $2n$ 维辛流形．于是，利用 M 的一个开集 U 上的辛坐标，可定义一个从 $(U, \omega|_U)$ 到 R^{2n} 的一个开集上的同构．局部辛坐标的存在还证明了两个同维数的辛流形是局部同构的．

§ 9. Hamilton 向量场和辛向量场

设 X 是流形 M 上的一个向量场，U 是 M 的一个开集，I 是 R 的

包含 0 的一个开区间．设可微映射

$$\varphi:\ I\times U\to M$$

满足下面的两个条件：

(i) $\varphi(0,x)=x$，$\forall x\in U$，

(ii) 映射：$a\longmapsto\varphi(a,x)$ 对 $\forall x\in U$ 都是X的一条积分曲线，

则我们称 φ 是由 X 产生的一个流 (flot)．

记 t 为投影

$$R\times M\to R,$$

并把偏导算子 $\frac{\partial}{\partial t}$ 看作流形 $R\times M$ 上的向量场，则上面的条件 (ii) 等价于要求

$$\varphi^T\circ\frac{\partial}{\partial t}=x\circ\varphi,$$

而在 $\Omega(M)$ 上则等价于

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\circ\varphi^*=\varphi^*\circ\theta(x).$$

设 $a\in I$，则可定义一浸入

$$\lambda_a:\ x\longmapsto(a,x),\ x\in U.$$

于是 λ_a 把U映入 IXU 中，而且 $\varphi_a=\varphi\circ\lambda_a$ 是一依赖于参数 $a\in I$ 的从U到M内的可微映射族．由 φ 的定义可知，对每一 $a\in I$，φ_a 都是从U到 $\varphi_a(U)$ 上的一个微分同胚．

9.1. **引理**．设 α 是M上的一个微分 p-形式，X是M上的一个向量场，φ: $I\times U\to M$ 是由X产生的一个流，则为使U上的 p-形式 $\varphi_a^*(\alpha)$ 不依赖于参数 $a\in I$，充分必要条件是在 $\varphi(I\times U)$ 上有 $\theta(X)\alpha=0$．

证．由微分形式

$$\varphi_a^*(\alpha),\ a\in I,$$

所构成的族可以看作是 $I\times U$ 上的微分形式

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt\wedge\varphi^*(\alpha)).$$

但是我们有

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt\wedge\varphi^*(\alpha))$$

$$=i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt\wedge\varphi^*(\alpha))$$

$$=i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(dt\wedge\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi^*(\alpha)\right)$$

$$=i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt\wedge\varphi^*\theta(X)\alpha).$$

所以若 $\theta(X)\alpha=0$，则 $\varphi_a^*(\alpha)$ 不依赖于 $a\in I$. 反之，若 $\varphi_a^*(\alpha)$ 不依赖于 a，则根据上面的计算，我们有

$$\varphi^*\theta(X)\alpha=dt\wedge r,\quad r\in\Omega^{p-1}(I\times U).$$

从而对任意的 $a\in I$ 有

$$\varphi_a^*\theta(X)\alpha=\lambda_a^*\varphi^*\theta(X)\alpha=\lambda_a^*(dt)\wedge\lambda_a^*(r)=0.$$

又由于全部 φ_a 都是子浸入，因此在 $\varphi(I\times U)$ 上有 $\theta(X)\alpha=0$. 证完.

9.2. **定义**. 设 (M,ω) 是一辛流形，若 M 上的一个向量场 X 满足 $\theta(X)\omega=0$，则我们称它为**辛向量场**.

因为 $d\omega=0$，所以向量场 X 为一辛向量场当且仅当 1-形式 $i(X)\omega$ 是闭的. 根据引理 9.1 可知，若 X 是辛向量场，则对任意一个由 X 产生的流

$$\varphi:\ I\times U\to M,$$

和任意的 $a\in I$，我们有

$$\varphi_a^*(\omega)=\varphi_0^*(\omega)=\omega|U.$$

从而 φ_a 是从 $(U,\omega|U)$ 到 $(\varphi(U),\ \omega|\varphi(U))$ 上的一个同构.

下面我们把辛流形 (M,ω) 上所有的辛向量场所构成的集合记为 $S(M,\omega)$. 因为映射

$$X\longmapsto\theta(X)$$

是一实线性映射，所以由辛向量场的定义可知 $S(M,\omega)$ 是 M 的向量场空间的一个子空间. 又因为

$$\theta([X,Y])=[\theta(x),\theta(Y)],$$

所以若 X, Y 是辛向量场，则 $[X, Y]$ 也是辛向量场. 于是 $S(M, \omega)$ 是M上的向量场所构成的 Lie 代数的一个子代数. 若 $X \in S(M, \omega)$，则对任一开集 $U \subset M$，有

$$X|U \in S(U, \omega|U).$$

注意到映射

$$X \longmapsto i(X)\omega, \quad X\text{是}M\text{上的向量场},$$

是一双射，所以利用它可定义辛向量场空间 $S(M, \omega)$ 到M的闭 1-形式所构成的向量空间上的一个标准同构. 为了更好地研究这一同构的性质，我们先简单回顾一下 de Rham 群的定义. 设 $Z^p(M)$ 是映射

$$d: \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

的核，即 $Z^p(M)$ 是M上所有的闭 p-形式所构成的空间. 设 $B^p(M)$是

$$d: \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)$$

的象，则 $B^p(M) \subset Z^p(M)$. 于是我们可定义

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M), \quad 0 \leqslant p \leqslant n.$$

这里 $n = \dim M$. 我们把 $H^p(M)$ 称为M的 p 维 de Rham 群. 为了明确 $H^p(M)$ 是 R-模，我们也把它写成 $H^p(M, R)$. 容易知道 $H^0(M, R) = R$，若M是连通的.

现对任意的 $X \in S(M, \omega)$，令 X 与 $i(X)\omega$ 所代表的 $H^1(M, R)$中的上同调类对应，我们就得到一个标准满线性映射

$$\rho: S(M, \omega) \to H^1(M, R).$$

下面我们来定义一个从空间 $C^\infty(M)$ 到空间 $S(M, \omega)$ 内的标准线性映射 H. 对任一函数 $f \in C^\infty(M)$，令 f 对应于M上的向量场 H_f 使得 $i(H_f)\omega = df$. 于是 H_f 是唯一确定的. 因为 df 是闭的，所以 H_f 是一个辛向量场. 又根据定义知H的核与 d 的核重合. 从而该核就是M上的局部为常数的函数空间 $H^0(M, R)$. 前面说过，若M是连通的，则 $H^0(M, R) = R$. 对任意的 $f \in C^\infty(M)$，$i(H_f)\omega$ 都是一正合形式，于是 $\rho(H_f) = 0$. 反之，若 $X \in S(M, \omega)$ 且 $\rho(X) = 0$，则存在 $f \in C^\infty(M)$ 使 $i(X)\omega = df$，$X = H_f$. 于

是我们得到一标准正合列

$$(9.3)\ (0)\to H^0(M,R)\to C^\infty(M)\xrightarrow{H} S(M,\omega)\xrightarrow{\rho} H^1(M,R)\to(0).$$

9.4. **定义**. 辛流形 (M,ω) 上的形如 $H_f\ (f\in C^\infty(M))$ 的向量场称为 Hamilton 向量场.

根据定义可知，所有的 Hamilton 向量场都是辛向量场. 若 $H^1(M,R)=0$，特别地若 M 单连通，则由 (9.3) 知所有的辛向量场都是 Hamilton 向量场. 一般地，对 $H^1(M,R)\neq 0$ 的情形，因为每一个闭的 1-形式都局部地重合于一个正合 1-形式，所以任一辛向量场都局部地重合于一个 Hamilton 向量场.

例1. 考虑经典力学的动力系统. 可以把它看作是某一流形 Q（称 Q 为组态空间，参看文献[2]和[9]）的切丛 TQ 上的一组向量场. 而 Lagrange 动力系统则是在定义了辛结构的 TQ 上的一组 Hamilton 向量场. 例如，描述质量为 m 的质点在欧氏空间 $Q=R^3$ 中的运动的动力系统，在势 U 的作用下，具有下面的形式:

$$X=\sum_{i=1}^{3}\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i},$$

其中 q_1,q_2,q_3 是 R^3 中的自然坐标，而 $\dot{q}_i=dq_i\ (i=1,2,3)$ 是 TR^3 上的函数. 质量为 m 的质点的轨迹是 X 的积分曲线在 R^3 上的投影.

设

$$\omega=m\sum_{i=1}^{3}dq_i\wedge d\dot{q}_i,$$

则 ω 是 TR^3 上的一个辛结构. 若设

$$f=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}m\dot{q}_i^2-U$$

为“动-势能”函数，则有

$$df=\sum_{i=1}^{3}m\dot{q}_i d\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial q_i}dq_i,$$

而且 $i(X)\omega=df$. 于是 $X=H_f$.

例 2. 设 $\omega = dx_1 \wedge dx_2$ 是 R^2 上的标准辛结构，令

$$C = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

则对 R^2 上任一可微函数 f 有

$$\begin{aligned} d(i(fC)\omega) &= \theta(fC)\omega \\ &= 2f\omega + df \wedge \omega = (2f + Cf)\omega. \end{aligned}$$

所以，为使 fC 是一辛向量场，充分必要条件是 $Cf + 2f = 0$. 在一般情形下，这个条件在 0 点的邻域内不能保证. 例如，若 $f = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$，则向量场 fC 是 $R^2\backslash(0)$ 上的一个辛向量场. 但是这时我们有

$$i(fC)\omega = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

这不是正合微分形式，所以向量场 fC 不是 Hamilton 向量场.

Hamilton 向量场和辛向量场的一些整体性质. 设 (M, ω) 是一辛流形，$f \in C^\infty(M)$，则 Hamilton 向量场 H_f 在点 $x \in M$ 处为 0 的充分必要条件是 $df_x = 0$，即 x 是 f 的一个临界点. 若 M 是紧流形（维数 >0），则 M 上每一 Hamilton 向量场在 M 上至少有两个零点，而对于不是 Hamilton 场的辛向量场，则可能在任一点处都 $\neq 0$.

例. 设 f 是 R^{2n} 上的一个非零线性型. 由于 df 以及 R^{2n} 上的标准辛结构都在平移下不变，所以 H_f 也在平移下不变. 令 x 是 H_f 在环面 R^{2n}/Z^{2n} 上的投影，则在 R^{2n}/Z^{2n} 的商辛结构下，X 是一辛向量场（比较§6，例 2）. 这一辛向量场恒不为 0.

若 (M, ω) 是一紧辛流形而且 $H^1(M, R) = (0)$，则 (M, ω) 的所有由某一辛向量场所产生的流所给出的自同构 φ 至少有两个不动点. 事实上，这时辛向量场是 Hamilton 向量场，而它的零点就是 φ 的不动点. 这一性质对 (M, ω) 的恒等映射的 C^1 逼近（C^1-proche）自同构也成立（参看文献[29]）.

设 (M, ω) 是一 $2n$ 维的辛流形，U 是 M 上的体积有限的连通开集，即

$$\int_U \omega^n < \infty,$$

(例如,相对紧开集.)设X是(M, ω)上的一个辛向量场且设 $\varphi: I \times U \to M$ 是由X产生的一个流.于是对任意的 $a \in I$, $\varphi_a^*(\omega) = \omega|U$, 所以

$$\int_{\varphi_a(U)} \omega^n = \int_U \omega^n.$$

若 $\varphi_a(U) \subset U$, 则必有 $\varphi_a(U) = U$. 设S是U的边界,若S是M的一个超曲面,则不可能对每一 $y \in S$, 向量 X_y 都横截于S (transverse à S). 特殊地,若 $X = H_f$,则f在S上的限制的临界点就是所有使得 $X_y \in T_y S$ 的点 y.

9.5. **引理.** 设 X, Y 是辛流形(M, ω)上的两个辛向量场,则

$$[X, Y] = H_{\omega(Y, X)}.$$

证. 事实上,

$$\begin{aligned} i([X, Y])\omega &= \theta(X)i(Y)\omega - i(Y)\theta(X)\omega \\ &= \theta(X)i(Y)\omega = (di(x) + i(x)d)i(Y)\omega \\ &= d(i(X)i(Y)\omega) = d\omega(Y, X), \end{aligned}$$

再由 $H_{\omega(Y,X)}$ 的定义便知引理成立. 证完.

9.6. **引理.** 设X是(M, ω)上的一个辛向量场, $f \in C^\infty(M)$, 则

(i) $Xf = \omega(H_f, X)$,

(ii) $[X, H_f] = H_{Xf}$.

证 事实上,

$$Xf = df(X) = (i(H_f)\omega)(X) = \omega(H_f, X).$$

而(ii)是(i)和引理9.5的直接推论. 证完.

9.7. **定义.** 设 (M, ω) 是一辛流形. 我们称从 $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$到$C^\infty(M)$内的实双线性映射

$\{,\}$: $(f, g) \longmapsto \{f, g\} = H_f g$, $f, g \in C^\infty(M)$, 为 Poisson 括号.

9.8. **引理.** 设f, g是辛流形(M, ω)上的两个可微函数,则有

$$\{f, g\} = \omega(H_g, H_f), \quad [H_f, H_g] = H_{\{f,g\}},$$

其中[,]是M上的向量场 Lie 代数通常的括号.

证. 事实上,

$$\{f, g\} = H_f g = i(H_f)dg = i(H_f)i(H_g)\omega = \omega(H_g, H_f),$$

所以第一个等式成立. 再利用引理 9.5 便可证明第二式. 证完.

9.9. **命题**. Poisson 括号满足下列等式:

(i) $\{f, g\} + \{g, f\} = 0$,

(ii) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$,

(iii) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$,

其中 $f, g, h \in C^\infty(M)$.

证. (i) 可由 $\{f, g\} = \omega(H_g, H_f)$ 导出. 利用引理9.8, 我们有

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} &= H_f H_g h = [H_f, H_g]h + H_g H_f h \\ &= H_{\{f,g\}}h + \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}.\end{aligned}$$

再利用 (i) 便得 (ii). 最后,

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= H_f(gh) = (H_f g)h + g(H_f h) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\}.\end{aligned}$$

证完.

命题 9.9 里的关系式 (i) 和 (ii) 表明, $C^\infty(M)$ 对 Poisson 括号构成 R 上的一个 Lie 代数.

9.10. **命题**. 若在 $H^0(M, R)$ 和 $H^1(M, R)$ 上定义零括号使它们成为 Lie 代数,则正合序列 (9.3)

$$(0) \to H^0(M, R) \to C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \to (0)$$

成为一 Lie 代数正合列.

证. 若 $f, g \in H^0(M, R)$, 则因函数 g 在局部上是常数, 所以有 $\{f, g\} = H_f g = 0$. 于是内射 $H^0(M, R) \to C^\infty(M)$ 是一 Lie 代数同态. 根据引理 9.8 可知

$$H: C^\infty(M) \to S(M, \omega)$$

也是 Lie 代数同态. 设 $X, Y \in S(M, \omega)$ 是两个辛向量场,根据引

理 9.5，我们有

$$i([X, Y])\omega = i(H_{\omega(Y,X)})\omega = d(\omega(Y, X)).$$

于是 $[X, Y]$ 在 $H^1(M, R)$ 中的象是零，所以映射

$$\rho: S(M, \omega) \to H^1(M, R)$$

是 Lie 代数同态．证完．

我们已经知道，辛向量场集 $S(M, \omega)$ 是 M 的向量场 Lie 代数的一个 Lie 子代数，而根据引理 9.8，我们知道 Hamilton 向量场的全体构成 $S(M, \omega)$ 的一个 Lie 子代数．

9.11. **命题**． 由 Poisson 括号所定义的 Lie 代数 $C^\infty(M)$ 的中心是 M 上的局部常数函数空间 $H^0(M, R)$.

证．事实上，若 $f \in C^\infty(M)$ 且对任意的 $g \in C^\infty(M)$ 有 $\{f, g\} = 0$，则 $H_f g = \{f, g\} = 0$ 对所有的 $g \in C^\infty(M)$ 都成立．于是 $H_f = 0$. 又我们已经知道 $H^0(M, R)$ 是 H 的核，所以 $f \in H_0(M, R)$. 反之，对任意的 $f \in H^0(M, R)$ 当然有 $\{f, g\} = 0$, $\forall g \in C^\infty(M)$. 证完．

设 (P, ω_P) 和 (Q, ω_Q) 是两个辛流形且设

$$\varphi: P \to Q$$

是一可微映射．因为映射

$$X \longmapsto i(X)\omega_P$$

是从 P 上的向量场模到模 $\Omega^1(P)$ 上的一个同构，所以对 Q 上任一向量场 Y，存在 P 上唯一的一个向量场 $\varphi^*(Y)$ 使下式成立：

$$i(\varphi^*(Y))\omega_P = \varphi^*(i(Y)\omega_Q).$$

映射 $\varphi^*: Y \longmapsto \varphi^*(Y)$ 是一实线性映射． 若 $g \in C^\infty(M)$，则有

$$\varphi^*(gY) = \varphi^*(g)\varphi^*(Y).$$

9.12. **引理**． (P, ω_P), (Q, ω_Q) 同上． 设 Y 是 Q 上的一个辛向量场，则 $\varphi^*(Y)$ 是 P 上的一个辛向量场并且对任意的 $g \in C^\infty(Q)$ 都有

$$\varphi^*(H_g) = H_{\varphi^*(g)}.$$

证．事实上，若 Y 是一辛向量场，则

$$di(\varphi^*(Y))\omega_P = d\varphi^*(i(Y)\omega_Q) = \varphi^*(di(Y)\omega_Q) = 0,$$

所以由 $\theta(\varphi^*(Y))$ 的定义知

$$\theta(\varphi^*(Y))\omega_P = di(\varphi^*(Y))\omega_P + i(\varphi^*(Y))d\omega_P = 0.$$

于是 $\varphi^*(Y)$ 是辛向量场. 又对任意的函数 $g\in C^\infty(Q)$ 有

$$i(\varphi^*(H_g))\omega_P = \varphi^*(i(H_g)\omega_Q) = \varphi^*(dg) = d\varphi^*(g),$$

所以 $\varphi^*(H_g) = H_{\varphi^*(g)}$. 证完.

9.13. **引理**. 设 (P, ω_P) 和 (Q, ω_Q) 是两辛流形,

$$\varphi:\ (P, \omega_P) \to (Q, \omega_Q)$$

是一辛流形同态,则对任一点 $x\in P$ 和任意的 Q 上的向量场 Y, 向量

$$\varphi^T(\varphi^*(Y)_x) - Y_{\varphi(x)}$$

对于 $(\omega_Q)_{\varphi(x)}$ 与 $\varphi^T(T_xP)$ 正交.

证. 事实上, 因为 $\omega_P = \varphi^*(\omega_Q)$, 所以对任一向量 $v\in T_xP$, 我们有

$$\begin{aligned}\omega_Q(\varphi^T(\varphi^*(Y)_x, \varphi^T v)) &= \omega_P(\varphi^*(Y)_x, v)\\ &= (i(\varphi^*(Y))\omega_P)(v) = (\varphi^*(i(Y)\omega_Q))(v)\\ &= (i(Y)\omega_Q)(\varphi^T v) = \omega_Q(Y_{\varphi(x)}, \varphi^T v).\end{aligned}$$

因此结论成立. 证完.

9.14. **命题**. 设 (P, ω_P) 和 (Q, ω_Q) 是两辛流形, $\varphi:(P,\omega_P)\to(Q, \omega_Q)$ 是一辛流形同态. 若 $\dim P = \dim Q$, 则对任意的 $f, g\in C^\infty(Q)$ 有

$$\varphi^*\{f, g\} = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}.$$

并且对 Q 上的任意两个向量场 X, Y 有

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)].$$

证. 因为 $\dim P = \dim Q$,所以 φ 在局部上是一辛流形同构,注意到 Poisson 括号的定义是局部性的,便知第一个等式自然成立. 下面我们给出一个直接的证明. 根据引理 9.13, 我们有 $\varphi^T\circ\varphi^*(Y) = Y\circ\varphi$, 从而 $\varphi^*(Y)\varphi^*(g) = \varphi^*(Yg)$ 对 Q 上任一向量场 Y 和任意的 $g\in C^\infty(Q)$ 成立. 于是, 若 $f, g\in C^\infty(Q)$,则由引理 9.12 得

$$\{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}$$
$$= H_{\varphi^*(f)}\varphi^*(g) = \varphi^*(H_f)\varphi^*(g)$$
$$= \varphi^*(H_f g) = \varphi^*\{f, g\}.$$

现设 X, Y 是Q上的两个向量场，$g \in C^\infty(Q)$，则有

$$(\varphi^*[X, Y])\varphi^*(g) = \varphi^*([X, Y]g)$$
$$= \varphi^*(X)\varphi^*(Yg) - \varphi^*(Y)\varphi^*(Xg)$$
$$= [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]\varphi^*(g).$$

因为φ是一子浸入,所以必有

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)].$$

证完.

在命题 9.14 的假定下,映射

$$\varphi^*: C^\infty(Q) \to C^\infty(P)$$

是一 Lie 代数同态(利用 Poisson 括号把它们定义为 Lie 代数).要注意,不是局部同胚的辛流形的同态不具有这个性质.

例. 设 $(P, \omega_P) = (R^2, dy_1 \wedge dy_2)$ 而

$$(Q, \omega_Q) = (R^4, dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4),$$

则浸入:

$$\varphi: (a_1, a_2) \to (a_1, 0, a_2, 0)$$

是一辛流形同态. 我们有

$$\varphi^*(x_1x_4) = \varphi^*(x_1x_2) = 0.$$

下面我们来计算 $\{x_1x_4, x_1x_2\}$. 现在

$$\omega_Q = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4,$$

所以有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\omega = dx_3, \qquad i\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\omega = dx_4,$$
$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\omega = -dx_1, \qquad i\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\omega = -dx_2.$$

根据 H_{x_j} 的定义有

$$i(H_{x_j})\omega = dx_j,$$

所以

$$H_{x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad H_{x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad H_{x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad H_{x_4} = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

于是得（利用命题 9.9）

$$\{x_1x_4, x_1x_2\} = \{x_1x_4, x_1\}x_2 + \{x_1x_4, x_2\}x_1$$
$$= \{x_1, x_1\}x_4x_2 + \{x_4, x_1\}x_1x_2 + \{x_1, x_2\}x_1x_4 + \{x_4, x_2\}x_1^2$$
$$= x_1^2.$$

而且

$$\varphi^*\{x_1x_4, x_1x_2\} = \varphi^*(x_1^2) = y_1^2 \neq 0.$$

所以 φ^* 不是 Lie 代数同态.

§10. 辛坐标下的 Poisson 括号

设(M, ω)是一辛流形，由于在这一节中，我们只限于考虑局部的性质，所以我们不妨假定 $x_1, \cdots x_{2n}$ 是整个(M, ω)上的一个辛坐标系.于是，若把 R^{2n} 中的开集看作是具有标准辛结构的辛流形，则 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 定义了一个从(M, ω)到 R^{2n} 的某一开集上的一个同构. 因为

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i},$$

若

$$X = \sum_{i=1}^{2n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是M上的一个向量场，则有

$$i(x)\omega = \sum_{i=1}^{n} (a_i dx_{n+i} - a_{n+i} dx_i).$$

因此，如果 $f \in C^\infty(M)$ 且 $i(X)\omega = df$，则

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}}, \qquad a_{n+i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} (i = 1, \cdots, n).$$

于是知道，函数 $f \in C^\infty(M)$ 所对应的 Hamilton 向量场 H_f 有表达式

$$H_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \right),$$

而对 $f, g \in C^\infty(M)$，我们有

$$(10.1)\quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_{n+i}}\right).$$

特别地,对于坐标函数有

$$H_{x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}, \qquad H_{x_{n+i}} = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\{x_i, x_{n+j}\} = \{x_{n+i}, x_{n+j}\} = 0,$$

$$\{x_i, x_{n+j}\} = -\delta_{ij},$$

其中 $i, j = 1, \cdots, n$.

现假定 $(M, \omega) = (R^{2n}, \underset{\sim}{\omega})$, 其中

$$\underset{\sim}{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是 R^{2n} 上的标准辛结构. 设 P 是由 $C^\infty(R^{2n})$ 中的多项式函数所构成的子代数. 对任整数 $r \geqslant 0$, 记 P_r 为 r 次齐次多项式所构成的空间. 根据式(10.1), 对任意 $r, s \geqslant 0$ 有

$$\{P_r, P_s\} \subset P_{r+s-2}.$$

令 $\mathfrak{g}_r = P_{r+2}$, 则有

$$\{\mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_s\} \subset \mathfrak{g}_{r+s}.$$

将 P 按 $\mathfrak{g}_r$ 在 Z 中分级后, 我们就得到一个分级 Lie 代数. 这个分级 Lie 代数的中心是 $\mathfrak{g}_{-2}$, 即常数函数空间. 空间 $\mathfrak{g}_{-1}$ 由 R^{2n} 上的线性函数构成,而空间 $\mathfrak{g}_0$ 则由二次型构成. $\mathfrak{g}_0$ 是一维数为 $n(2n+1)$ 的 Lie 子代数. 利用映射 $f \longmapsto H_f$, 我们可以定义从 $\mathfrak{g}_{-1}$ 到常向量场(在 R^{2n} 的平移作用下不变的向量场)所构成的空间上的一个同构. 利用同一映射,我们还可以得到从 $\mathfrak{g}_0$ 到 $S(R^{2n}, \underset{\sim}{\omega})$ 中的一次辛向量场所构成的 Lie 子代数上的一个同构. 该子代数同构于§4 中介绍过的辛群 $Sp(n)$ 的 Lie 代数 $sp(R^{2n}, \omega_0)$. 事实上,设 α 是 R^{2n} 上的一个自同态,令 L_α 为 R^{2n} 上满足

$$L_\alpha \cdot x_i = -x_i \circ \alpha, \quad i = 1, \cdots, 2n,$$

的向量场. 对任意的 $\xi \in R^{2n}$, 记 L_ξ 为满足

$$L_\xi x_i = x_i(\xi), \quad i = 1, \cdots, 2n,$$

的向量场,则有

$$[L_\alpha, L_\xi] = L_{\alpha(\xi)}.$$

于是对任意的 $\xi, \eta \in R^{2n}$,

$$\begin{aligned}
&(\theta(L_\alpha)\underline{\omega})(L_\xi, L_\eta) \\
&= L_\alpha \underline{\omega}(L_\xi, L_\eta) - \underline{\omega}([L_\alpha, L_\xi], L_\eta) - \underline{\omega}(L_\xi, [L_\alpha, L_\eta]) \\
&= \underline{\omega}(L_{\alpha(\xi)}, L_\eta) + \underline{\omega}(L_\xi, L_{\alpha(\eta)}) \\
&= \omega_0(\alpha(\xi), \eta) + \omega_0(\xi, \alpha(\eta)),
\end{aligned}$$

其中

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge x_{n+i} \in A^2(R^{2n}).$$

于是向量场 L_α 为辛向量场当且仅当 $\alpha \in sp(R^{2n}, \omega_0)$.

10.2. 引理. 若 $f \in P_1$ 且 $f \neq 0$, 则 P 的自同态映射

$$g \longmapsto \{f, g\}, \quad g \in P,$$

是满自同态.

证. 事实上,设 $u_1, \cdots, u_{2n}$ 是辛空间(R^{2n}, ω_0)的一组辛基使得 $f(u_i) = \delta_{1i}$, 又设 $y_1, \cdots, y_{2n}$ 为 $u_1, \cdots, u_{2n}$ 的对偶基, 则 $y_1, \cdots, y_{2n}$ 是流形 $(R^{2n}, \underline{\omega})$ $(R^{2n}, \underline{\omega})$ 上的辛坐标,并且等式

$$\{f, g\} = -\frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}$$

对任意的 $g \in P$ 成立,故结论成立.证完.

10.3. 引理. Lie 代数 P 中仅有的理想子代数是 (0), P_0 (零次多项式集合)和 P.

证. 事实上, 设 $\mathfrak{a}$ 为 Lie 代数 P 的一个含有次数 > 0 的多项式函数的理想,因为对所有的 i 有 $\{x_i, \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{a}$, 从而 $\mathfrak{a}$ 在 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的作用下不变. 于是 $\mathfrak{a}$ 中含这样一个多项式函数 $f = f_0 + f_1$, 这里 $f_0 \in P_0$, $f_1 \in P_1 \backslash (0)$. 所以对任意的 $g \in P$, 我们有 $\{f, g\} = \{f_1, g\}$. 又由于映射

$$g \longmapsto \{f_1, g\}, \quad g \in P,$$

是满射(引理 10.2),所以有 $\mathfrak{a} = P$. 又 (0) 和 P_0 显然是理想. 证完.

形式辛向量场 Lie 代数. 设 (M, ω) 为一辛流形, $x \in M$. 记

m_x° 为由 $C^\infty(M)$ 中在点 x 处的值为零的函数构成的极大理想. 设

$$m_x^\infty = \bigcap_{p>0} m_x^p.$$

根据命题 9.9, 对任意的 $f\in C^\infty(M)$, 映射

$$g\longmapsto \{f, g\},\ g\in C^\infty(M),$$

是 $C^\infty(M)$ 的一个导子. 所以对任意的 $p>0$, 有 $\{f, m_x^p\}\subset m_x^{p-1}$, 并且 $\{f, m_x^\infty\}\subset m_x^\infty$. 这说明 m_x^∞ 不但对结合代数结构是 $C^\infty(M)$ 的一个理想, 而且对由 Poisson 括号所定义的 Lie 代数结构也是一个理想. 于是我们可以定义商代数. 我们把商代数

$$J_x(M) = C^\infty(M)/m_x$$

称为点 x 处的射流 (jet) 代数. 它是一 Lie 代数. 我们仍然把 $J_x(M)$ 的 Lie 代数括号称为 Poisson 括号并记为 $\{,\}$.

10.4. 命题. (0), R 和 $J_x(M)$ 是 Lie 代数 $J_x(M)$ 中仅有的理想.

证. (0)和 R 显然是 $J_x(M)$ 的理想. 我们证明 $J_x(M)$ 中除(0)和 R 外仅有的理想是 $J_x(M)$ 本身. 为此, 在 x 的某一邻域内选定在点 x 处为零的辛坐标系, 于是就把所考虑的情形化为考虑辛流形 (R^{2n}, ω) 在原点处的函数射流代数 $J_0(R^{2n})$, 这里 $\omega=\sum_{i=1}^n dx_i\wedge dx_{n+i}$ 是标准辛结构. 作为结合代数, $J_0(R^{2n})$ 等同于关于 $x_1,\cdots,x_{2n}$ 的形式序列代数 (l'algèbre des séries formelles en $x_1,\cdots,x_{2n}$). 若

$$f=\sum_{p>0} f_p,\qquad f_p\in P_p;\ g=\sum_{p>0} g_p, g_p\in P_p,$$

则

$$\{f, g\} = \sum_{p,q>0}\{f_p, g_q\}.$$

设 $\mathfrak{a}$ 为 Lie 代数 $J_0(R^{2n})$ 的一个不包含于 $R=P_0$ 中的理想. 因为 $\{x_i, \mathfrak{a}\}\subset\mathfrak{a}$, $i=1,\cdots,2n$, $\mathfrak{a}$ 在偏导 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\cdots,2n$, 的作用下不变. 于是 $\mathfrak{a}$ 中至少含一个这样的元素

$$h=\sum_{p>0}h_p,\quad h_p\in P_p,$$

其中 h_1 是 P_1 中的非零元素．于是映射

$$g\longmapsto\{h,g\},\ g\in J_0(R^{2n}),$$

是 $J_0(R^{2n})$ 的一个满同态．事实上，若

$$g=\sum_{p>0}g_p\in J_0(R^{2n}),$$

则 $\{h,g\}$ 在 P_r 中的项是

$$\{h,g\}_r=\{h_1,g_{r+1}\}+\{h_2,g_r\}+\cdots+\{h_{r+1},g_1\}.$$

于是根据引理 10.2，对任意的

$$f=\sum_{p>0}f_r\in J_0(R^{2n}),$$

我们可以逐步地定义 g_p 使

$$f_r=\{h_1,g_{r+1}\}+\cdots+\{h_{r+1},g_1\}$$

对任意的 r 成立．令 $g=\sum_{p>0}g_p$，则有 $\{h,g\}=f$．但是 $h\in\mathfrak{a}$，所以 $f\in\mathfrak{a}$．由 f 的任意性便得 $\mathfrak{a}=J_0(R^{2n})$．证完．

设 X 是流形 M 上的一个向量场，则 Lie 导子

$$\theta(X):\ f\longmapsto Xf$$

保持 m_x^∞ 不变，通过作商，便在射流代数 $J_x(M)$ 上诱导出一个导子 $J_x(X)$，我们称它为向量场 X 在点 x 处的射流 (jet)．若 (M,ω) 是一辛流形，则下面的两个映射

$$f\longmapsto H_f\quad\text{和}\quad X\longmapsto J_x(X)$$

的复合映射是一个从 Lie 代数 $C^\infty(M)$ 到由 $J_x(M)$ 的导子构成的 Lie 代数内的一个同态． 因为任一辛向量场都在 x 的某个邻域内与一 Hamilton 向量场重合，所以同态映射 $f\longmapsto J_x(H_f)$ 的象是辛向量场在点 x 处的射流 Lie 代数．若 $f\in m_x^\infty$，则有

$$H_fC^\infty(M)\subset m_x^\infty,$$

于是 $J_x(H_f)=0$．通过作商，我们得到从 Lie 代数 $J_x(M)$ 到辛向量场在点 x 处的射流所构成的 Lie 代数上的一个满同态． 若 $f\in C^\infty(M)$ 且 $J_x(H_f)=0$，则有 $H_fC^\infty(M)\subset m_x^\infty$，于是对所有的 $g\in$

$C^\infty(M)$ 都有 $\{f,g\}\in m_x^\infty$. 这表明 $f-f(x)\in m_x^\infty$. 于是，$J_x(f)$ 是常数 $f(x)$ 的射流. 总起来，我们得到一正合序列

$$(0)\to R\to J_x(M)\to J_x(S(M,\omega))\to 0.$$

10.5. **命题**. 辛流形上所有辛向量场在某一点处的射流全体构成的 Lie 代数是一单 Lie 代数.

证. 因为 $J_x(S(M,\omega))$ 同构于 $J_x(M)/R$，所以这个命题实际上是命题 10.4 的另一种叙述形式. 证完.

§11. 辛流形的子流形

设 (M,ω) 是一辛流形并设 N 是 M 的一个子流形. 若 $x\in N$，则 T_xN 是辛向量空间 (T_xM,ω_x) 的一个向量子空间.

11.1. **定义**. 辛流形 (M,ω) 的子流形 N 称为是迷向子流形（或余迷向子流形，Lagrange 子流形，辛子流形），如果对任一 $x\in N$，空间 T_xN 都是辛空间 (T_xM,ω_x) 的一个迷向（或余迷向，Lagrange，辛）子空间.

对于从某一流形 P 到辛流形 (M,ω) 内的浸入映射，我们也使用同样的术语. 例如，浸入映射 $\varphi: P\to M$ 称为 Lagrange 浸入，若对任意的 $y\in P$，φ^T 都把 T_yP 映为 $(T_{\varphi(y)}M,\omega_{\varphi(y)})$ 的一个 Lagrange 子空间.

不论 (M,ω) 的子流形 N 是迷向的，余迷向的，Lagrange 的或是辛的，ω 在 N 上的拉回 $\omega|N$ 都是一常秩 2-形式. 若 N 是余迷向的，则 $\omega|N$ 的秩等于 $2\dim N-\dim M$. 若 N 是 M 的 Lagrange 子流形，则 $\dim N=\dfrac{1}{2}\dim M$.

设 N 是 M 的一个子流形，$i: N\to M$ 为内射，则 TM 的逆象是底空间 N 上的向量丛，我们把它记为 T_NM. 对任一 $x\in N$，T_NM 在点 x 上的纤维可等同于 T_xM，从而它具有一辛向量空间结构. 把 TN 看作 T_NM 的一个子向量丛，并把 T_NM 的在点 x 上的纤维是 $(T_xN)^\perp$ 的子向量丛记为 $TN^\perp$. 于是，为使子流形 N 是迷

向的（或者余迷向的），充分必要条件是 $TN \subset TN^{\perp}$（或 $TN \supset TN^{\perp}$）；为使N是 Lagrange 的，充分必要条件是 $TN = TN^{\perp}$；而若 $TN \cap TN^{\perp} = (0)$，则N是辛子流形.

11.2. **扩充引理（A. Weinstein）**.设M是一 $2n$ 维流形，N是M的一个闭子流形. 设 ω_0，ω_1 是M上的两个辛结构，它们在$\Lambda^2(T_N M)$ 上的限制相同. 则存在N在M中的两个开邻域 U_0 和 U_1，以及从 U_0 到 U_1 上的微分同胚 φ_1 使 φ_1 在N上的限制是恒等映射且 $\omega_0 = \varphi_1^*(\omega_1)$.

证. 我们需要引用 Poincaré 引理的一个一般形式（参看文献[29]）：因为N是闭子流形，所以存在N在M中的一个开邻域V和V上的 1-形式β使β在 $T_N M$ 上为零且 $d\beta = (\omega_0 - \omega_1)|V$. 记从 $R \times M$ 到R上的投影映射为 t，把M上的微分形式和由投影所定义的它们在 $R \times M$ 上的拉回视为相同的，则我们可以假设

$$\tilde{\omega} = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) \in \Omega^2(R \times M).$$

这个微分形式在 $R \times N$ 的任意一点处的秩都是 $2n$. 因而在 $R \times N$ 在 $R \times M$ 中的某一开邻域上，它的秩也是 $2n$，我们设 V' 是这样的一个开邻域. 因为 $R \times V$ 是 $R \times N$ 的一个开邻域，所以我们可选取 V' 使得 $V' \subset R \times V$. 根据β的定义和 V' 的选取，我们知道$\beta|V'$ 的核是 TV' 的一个由向量场 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 所生成的子向量丛. 因为 $i\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\beta = 0$，所以存在 V' 上的向量场X使得 $i(X)\tilde{\omega} = \beta|V'$. 而且我们可以选取$X$使得 $i(X)dt = 0$，这是可以做到的，因为这相当于选取N的邻域上的向量场使它依赖于参数 t. 因为β在 $T_N M$ 上为零，所以向量场X在 $R \times N$ 上恒为零. 于是，存在 $[0, 1] \times N$ 在 $R \times M$ 中的一个开邻域W和可微映射

$$\varphi: W \to R \times M,$$

使得

(i) $\varphi^T \circ \dfrac{\partial}{\partial t} = \left(X + \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \circ \varphi$,

(ii) $\varphi(0, x) = x$，对 $\forall (0, x) \in W$.

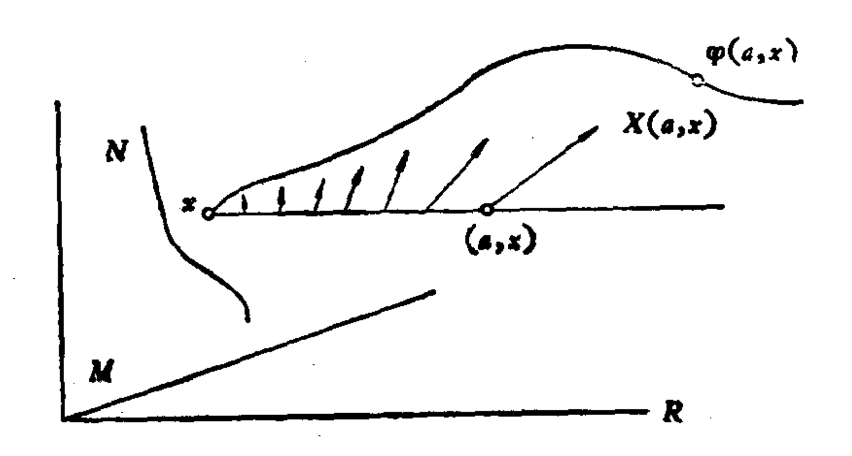
注意到在 $\Omega(\varphi(W))$ 上，条件(i)等价于

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\circ\varphi^* = \varphi^*\circ\theta\left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

把它应用到函数 t 上得

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\circ\varphi) = 1.$$

于是在 $[0,1]\times N$ 的某一邻域上有 $t\circ\varphi = t$（参看下图）。



对任意的 $x\in N$，根据 W 的定义知道，有 x 在 M 中的一个开邻域 V_x 使得 $[0,1]\times V_x\subset W$. 于是有 N 在 M 中的开邻域 U_0 使得 $[0,1]\times U_0\subset W$. 对任一 $a\in[0,1]$，定义从 U_0 到 M 内的映射 φ_a 为

$$\varphi(a,x) = (a,\varphi_a(x)),\ \forall_x\in U_0.$$

我们证明 U_0 上的微分形式族 $\varphi_a^*(\tilde{\omega})$ 不依赖于 a. 注意到该微分形式族实际上就是

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt\wedge\varphi^*(\tilde{\omega})),$$

用 $\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 作用得

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt\wedge\varphi^*(\tilde{\omega}))$$
$$= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(dt\wedge\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi^*(\tilde{\omega})\right)$$

$$= \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi^*(\tilde{\omega})$$

$$= \varphi^*\theta\left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{\omega}$$

$$= \varphi^*(di(X)\tilde{\omega} + \omega_1 - \omega_0)$$

$$= d\beta + \omega_1 - \omega_0 = 0.$$

所以 $\varphi_a^*(\tilde{\omega})$ 不依赖于参数 $a \in [0, 1]$，从而

$$\varphi_1^*(\omega_1) = \varphi_0^*(\omega_0).$$

因为 φ_0 是恒等映射，所以我们有 $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$，也就是说，$\varphi_1$ 是从 $(U_0; \omega_0)$ 到 $(\varphi_1(U_0), \omega_1)$ 上的一个同构. 又因为 X 在 $R \times N$ 上等于 0，所以 φ_1 在 N 上的限制是恒等映射. 证完.

注1. 由于我们假定了 ω_0 和 ω_1 在 $\wedge^2 T_N M$ 上相等而不仅仅是在 $\wedge^2 TN$ 上相等，所以我们能够在 N 的某一邻域上选取 1-形式 β 使 $d\beta = \omega_0 - \omega_1$. 并且我们可以选取这样的 β，使得不但对任意的 $x \in N$ 都有 $\beta_x = 0$，而且 β 在 N 的任一点处的一阶射流也等于零. 当 β 具有这些性质时，相应的微分同胚 φ_1 就给出一个在 $T_N M$ 上为恒等映射的切丛映射 φ_1^T（参看文献 [29]）.

注2. 把引理 11.2 应用于 $N = \{x\}$，则可推出在点 $x \in M$ 的某一邻域上存在辛坐标系.

11.3. **命题**. 设 (M, ω) 是一辛流形，N 是 (M, ω) 的一个闭的 Lagrange 子流形，则对任一点 $x \in N$，存在 x 的开邻域 V 和 V 上的辛坐标系 $y_1, \cdots, y_{2n}$ 使得 $N \cap V$ 是 V 中满足 $y_1 = \cdots = y_n = 0$ 的点集.

证. 事实上，设 U 是 x 的一个开邻域且设 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 是 U 上的坐标系使得对 $N \cap U$ 中的点，等式 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 成立. 把引理 11.2 应用于辛结构 $\omega_0 = \omega|U$ 和 $\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$，便得到具有所求性质的辛坐标 $y_i = \varphi_1^*(x_i)$. 证完.

辛流形的 Lagrange 子流形在辛流形理论中占有重要的地位，许多内容的讨论都与它有关联. 我们先来看几个例子，然后给

出一个构造 Lagrange 子流形的基本方法.

例 1. 设 (M, ω) 是一 2 维辛流形，则它的所有 Lagrange 子流形都是 1 维的，从而都是曲线，因为 ω 是反对称形式，所以 M 的任意一条曲线都是 Lagrange 子流形.

例 2. $(R^{2n}, \underline{\omega})$**的 Lagrange 子流形.** 我们设 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 是 R^{2n} 上的辛坐标使得

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}.$$

设 U 是 R^n 的一个开子集且设

$$\varphi:\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

是从 U 到 R^n 内的一个可微映射. 令

$$N_\varphi = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\},$$

则 N_φ 称为 φ 在 $U \times R^n \subset R^{2n}$ 中的图形. 为使 N_φ 是 $(R^{2n}, \underline{\omega})$ 的一个 Lagrange 子流形，充分必要条件是浸入

$$x \longmapsto (x, \varphi(x)),\ x \in U,$$

是一迷向浸入. 这个条件可以表达为

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\varphi_i = 0.$$

换句话说，为使 N_φ 为一 Lagrange 子流形，充分必要条件是 1-形式 $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i dx_i$ 是一闭形式. 如果 $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i dx_i$ 是某一函数 $f: U \to R$ 的全微分，则它当然就是闭的. 在这种特殊情形，我们称 f 为 Lagrange 子流形 N_φ 的一个**生成函数**.

设

$$\phi:\ (x, y) \longmapsto (\phi_1(x, y), \cdots, \phi_n(x, y))$$

是从 $U \times R^n$ 到 R^n 内的一个可微映射. 我们利用 ϕ 定义一个映射 $\boldsymbol{\phi}$

$$\boldsymbol{\phi}:\ (x, y) \longmapsto (x, y + \phi(x, y)),\ (x, y) \in U \times R^n,$$

则 $\boldsymbol{\phi}$ 是从 $U \times R^n$ 到其自身内的可微映射. 为使 $\boldsymbol{\phi}$ 是辛流形 $(U \times R^n, \underline{\omega})$ 的一个自同态，充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\phi_i = 0.$$

这相当于要求 $\phi(x, y)$ 不依赖于 y 并且 $\sum_{i=1}^{n} \phi_i dx_i$ 是 U 上的闭形式. 若 ϕ 满足这两条, 则 Φ 是辛流形$(U \times R^n, \omega)$的一个自同构. 反之, 若 $\sum_{i=1}^{n} \phi_i dx_i$ 是 U 上的任意一个闭的微分 1-形式, 则我们可以利用 dx_i 的系数 $\phi_i(i = 1, \cdots, n)$ 来定义上面的 ϕ, 从而得到 $(U \times R^n, \omega)$ 到其自身上的一个同构. 于是, 在 U 上的闭的微分 1-形式加法群和辛流形 $(U \times R^n, \omega)$ 的保持纤维 R^n 不变的自同构群之间存在一标准同构, 该自同构群的元素限制在纤维 $\{x\} \times R^n$ 上是一平移变换. 相应的 Lagrange 子流形 N_ϕ 是 Lagrange 子流形 $U \times \{0\}$ 在 Φ 下的象.

11.4. **命题**. 设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个辛流形, $\varphi: M_1 \to M_2$ 是一可微映射, 则 φ 是一辛流形同态的充分必要条件是: φ 的图形

$$\{(x, \varphi(x)): x \in M_1\}$$

是辛流形 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个迷向子流形.

证. 事实上, 设 $\tilde{\varphi}$ 是由映射

$$x \to (x, \varphi(x)), \ x \in M_1,$$

所定义的 M_1 到 $M_1 \times M_2$ 内的浸入, 则我们有

$$\tilde{\varphi}^*(pr_1^*(\omega_1) - pr_2^*(\omega_2)) = \omega_1 - \varphi^*(\omega_2).$$

于是 φ 是辛流形同态等价于 φ 的图形是 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个迷向子流形. 证完.

若 $\dim M_1 = \dim M_2$, 则从 (M_1, ω_1) 到 (M_2, ω_2) 内的一个辛流形同态的图形是$(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个 Lagrange 子流形, 因为这时该同态的图形是 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个维数为 $\dim M_1$ 的迷向子流形. 但是$(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的 Lagrange 子流形不一定是某一同态的图形.

用收缩法构造 Lagrange 子流形. 设 (M, ω) 是一辛流形,

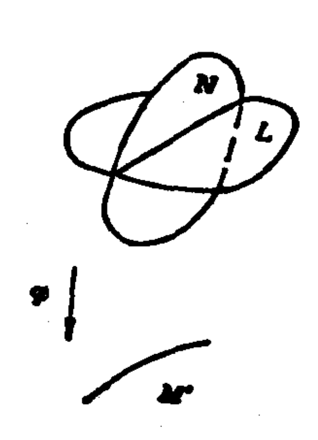
$N \subset M$ 是M的一个余迷向子流形．又设(M', ω')是另一辛流形，

$$\varphi:\ N \to M'$$

是一子浸入使得

$$\varphi^*(\omega') = \omega | N.$$

因为N是一余迷向子流形，故$\omega|N$是常秩的．所以根据命题 8.3 的推论，我们总可以找到这样的一个辛流形(M', ω')和一子浸入φ使得它在N的某个点的某一邻域内满足上面的条件．



设L为(M, ω)的一个 Lagrange 子流形．我们假设L和N有一个"适用交"(bonne intersection)，即

(1)　$L \cap N$ 是M的一个子流形，

(2)　$T(L \cap N) = TL \cap TN$.

设 $x \in L \cap N$. 因为T_xN是(T_xM, ω_x)的一个余迷向子空间，所以子空间 $T_xL \cap T_xN + T_xN^{\perp}$ 是 $(T_xN, (\omega|N)_x)$ 的一个 Lagrange子空间(命题 1.5).

因为

$$\varphi_x^T:\ T_xN \to T_{\varphi(x)}M'$$

是一满射且

$$\varphi^*(\omega') = \omega | N,$$

所以子空间

$$\varphi_x^T\,(T_xL \cap T_xN + T_xN^{\perp})$$

是 $(T_{\varphi(x)}M', \omega'_{\varphi(x)})$ 的一个 Lagrange 子空间．但是

$$TN^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\varphi^T \ 且\ T_xL \cap T_xN = T_x(L \cap N),$$

于是对任意的 $x \in M$，$\varphi^T(T_x(L \cap N))$ 是

$$(T_{\varphi(x)}M', \omega'_{\varphi(x)})$$

的一个 Lagrange 子空间．这证明了φ在$L \cap N$上的限制是常秩$\frac{1}{2}\dim M'$的，在N的局部上，该限制分解为到 M' 内的一个 Lagrange 浸入的一个连续子浸入(se factorise en une submersion suivie d'une immersion Lagrangienne dans M').

于是，对任意的 $x \in L \cap N$，存在x在N中的一个邻域V使得$\varphi(V)$是(M', ω')的一个 Lagrange 子流形．我们把这样构造出

来的(M',ω')的 Lagrange 子流形称为是由 Lagrange 子流形 L 收缩而得到的.

下面我们来看一个例子.

例. 设

$$z_j = x_j + iy_j,\quad j = 1,\cdots,n+1,$$

是 C^{n+1} 上的自然坐标并设

$$h = \sum_{j=1}^{n+1} dz_j d\bar{z}_j$$

是标准 Hermite 型. h 的虚部是

$$-\sum_{j=1}^{n+1} dx_j \wedge dy_j.$$

这是 C^{n+1} 上的一个辛结构. 若记 p 为从 $C^{n+1}\backslash(0)$ 到投影空间 CP^n 上的标准投影,则由§6 中的例 5,可知在 CP^n 上存在辛结构 ω 使得

$$p^*(\omega) = -\frac{1}{r}\sum_j dx_j \wedge dy_j + \frac{1}{2}\frac{dr}{r^2}\sum_j (x_j dy_j - y_j dx_j),$$

其中 $r = \sum_j z_j\bar{z}_j$. 设 S^{2n+1} 为由 $r=1$ 所定义的球面. 因为它的余维数等于 1, 所以它是$(C^{n+1}, -\sum_j dx_j\wedge dy_j)$的一个余迷向子流形. 我们有

$$p^*(\omega)|S^{2n+1} = -\sum_j dx_j \wedge dy_j | S^{2n+1}.$$

把 p 限制在 S^{2n+1} 上,我们就得到利用辛流形

$$(C^{n+1}, -\sum_j dx_j \wedge dy_j)$$

的 Lagrange 子流形用收缩法构造 CP^n 的 Lagrange 子流形所需要的条件. 例如,若 E 是辛空间

$$(C^{n+1}, \sum_j x_j \wedge y_j)$$

的一个 Lagrange 向量子空间,则它是辛流形

$$(C^{n+1}, -\sum_j dx_j \wedge dy_j)$$

的一个 Lagrange 子流形, 而且它与 S^{2n+1} 的交 $E\cap S^{2n+1}$ 是一 n 维

球面.

标准投影映射 p 在 $E\cap S^{2n+1}$ 上的限制是一浸入，通过作商，由它可以得到一个从由 E 所决定的实投影空间到 CP^n 的某一 Lagrange 子流形上的微分同胚.

Poisson 括号和余迷向子流形. 设 (M, ω) 是一辛流形且设 N 是 (M, ω) 的一个余迷向子流形. 若函数 $f\in C^\infty(M)$ 在 N 上的限制是一常数，则对任一向量 $v\in TN$ 有

$$(i(H_f)\omega)(v) = df(v) = 0.$$

于是对任意的 $x\in N$ 有 $(H_f)(x)\in TN^\perp$. 因为 N 是余迷向的，所以有 $TN^\perp\subset TN$，于是对任意的 x 有 $(H_f)(x)\in TN$. 所以，由在 N 上为常数的函数所定义的 Hamilton 向量场与 N 相切.

现设 $f, g\in C^\infty(M)$ 且 f, g 在 N 上的限制均是常数. 那么，因为 H_f 与 N 相切，所以对任意的 $x\in N$ 有

$$\{f, g\}(x) = (H_f g)(x) = 0.$$

这说明 M 上的所有限制在 N 上为常数的可微函数在 Poisson 括号下构成 $C^\infty(M)$ 的一个 Lie 子代数.

我们现在进一步假定 N 的余维数是 k. 设

$$f_1, \cdots, f_k\in C^\infty(M)$$

是一组在 N 上等于零且在 N 的所有的点上都有

$$df_1\wedge\cdots\wedge df_k\neq 0$$

的函数，则对任一 $x\in N$，向量

$$(H_{f_1})(x), \cdots, (H_{f_k})(x)$$

是 $T_xN^\perp$ 的一组基而且 T_xN 是 (T_xM, ω_x) 中由

$$(H_{f_1})(x), \cdots, (H_{f_k})(x)$$

所张成的子空间的正交补.

习题. **Lagrange** 叶结构 (feuilletages). 设 (M, ω) 是一辛流形且设 E 是 TM 的一个可积子丛，我们假定 E 是 Lagrange 子丛，也就是说，对所有的 $x\in M$, E_x 都是 (T_xM, ω_x) 的一个 Lagrange 子空间. 设 P 是 M 的一个子流形，若 P 满足下面两条:

(i) $T_xP = E_x$, $\forall x\in P$,

(ii) 在包含关系下，P是M中所有满足(i)的子流形所构成的集合的一个极大元，

则我们称P为E的一片积分叶子．因为E是一 Lagrange 子从，所以E的每一积分叶子都是(M,ω)的一个 Lagrange 子流形．我们说E在(M,ω)上定义了一个 Lagrange 叶结构．

试证明：若 X，Y 是E的两个可微截面，则在M上存在唯一的一个向量场$\nabla_X Y$使得对M上任意的向量场Z都有

$$\omega(\nabla_x Y, z) = X\omega(Y, Z) - \omega(Y, [X, Z]),$$

而且$\nabla_x Y$是E的一个截面．并证明，对E的任意两个可微截面X,Y,有(参看文献[28])

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X,Y]} Z,$$

其中Z是M上的一个向量场．

由此导出，对E的任一积分叶子P，在P上存在一线性连络∇，它的曲率和挠率都是零，并且可以这样来刻划它：若X和Y是E的两个可微截面，则

$$\nabla_X|_P(Y|_P) = (\nabla_X Y)|_P.$$

我们将在§12中利用余切从来给出 Lagrange 叶结构的例子．

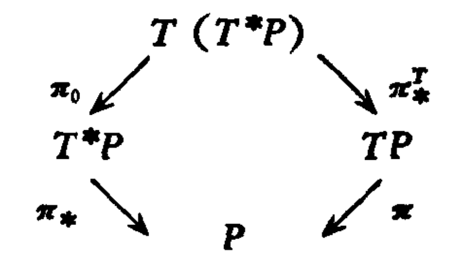
第三章　余　切　丛

§ 12. Liouville 形式和余切丛上的标准辛结构

在这节里，我们用 P 来表示一个流形，P 上的余切丛用 T^*P 表示. 向量丛 T^*P 在任意一点 $x\in P$ 处的纤维 T_x^*P 是向量空间 T_xP 的对偶空间，T_x^*P 中的元素是点 x 处的余切向量. 我们分别用 π 和 π_* 来表示向量丛 TP 和 T^*P 在 P 上的投影. 我们用 $T(T^*P)$ 来表示余切丛 T^*P 上的切丛并用 π_0 表示 $T(T^*P)$ 在底空间 T^*P 上的投影. 把 π_* 所定义的切空间映射记为 π_*^T，则

$$\pi_*^T:\ T(T^*P)\longrightarrow TP.$$

不难看出下面的图是可交换的



因此，由下式所定义的映射 φ_1

$$\varphi_1:\ v\longmapsto(\pi_0(v),\ \pi_*^T(v)),\ v\in T(T^*P),$$

是从 $T(T^*P)$ 到纤维丛积

$$T^*P\underset{P}{\times}TP$$

内的一个可微映射，按通常的方法，定义从

$$T^*P\underset{P}{\times}TP$$

到 R 内的映射 φ_2 如下：

$$\varphi_2:\ (\xi,u)\longmapsto\xi(u),\ (\xi,u)\in T^*P\underset{P}{\times}TP,$$

则 φ_2 也是一可微映射. φ_1 与 φ_2 的合成映射 $\varphi_2\circ\varphi_1$ 是从 $T(T^*P)$ 到 R 内的一个可微映射，它在每一纤维 $T_\xi(T^*P)$ $(\xi\in T^*P)$ 上的

限制是线性映射，因此，它是流形 T^*P 上的微分 1-形式，这是一个十分重要的 1-形式。 为方便起见，若 $(\xi, u) \in T^*P \underset{P}{\times} TP$，我们把实数 $\xi(u)$ 记为 $\langle \xi, u \rangle$。

12.1 **定义** 在余切丛 T^*P 上定义一个微分 1-形式 α 如下：对任意的 $v \in T(T^*P)$，令

(12.2) $\alpha(v) = \langle \pi_0(v), \pi_*^T(v) \rangle_P$.

我们称 α 为 T^*P 上的一个 Liouville 形式。

显然，若 α 是 T^*P 上的 Liouville 形式，则有

$$\ker\alpha \supset \ker\pi_*^T.$$

把 $T(T^*P)$ 中满足 $\pi_*^T(v) = 0$ 的向量 a 称为垂直向量。 于是，Liouville 形式在 $T(T^*P)$ 的垂直向量上为零。

设 X 是 P 上的任意一个向量场，我们利用 X 来定义 T^*P 上的一个可微函数 f_X 如下：

$$f_X(\xi) = \langle \xi, X(\pi_*(\xi)) \rangle, \ \forall \xi \in T^*P,$$

其中 $X(\pi_*(\xi))$ 代表向量场 X 在点 $\pi_*(\xi) \in P$ 的值。于是 $f_X = 0$ 当且仅当 $X = 0$。所以映射

$$F: X \longmapsto f_X, \ X \text{ 是 } P \text{ 的向量场},$$

是一实线性内射。它的象是 $C^\infty(T^*P)$ 的一个子空间，这个子空间的每一函数在 T^*P 的纤维上的限制都是线性的。若 $g \in C^\infty(P)$ 且若 X 是 P 上的一个向量场，则有

$$f_{gX} = (g \circ \pi_*) f_X.$$

设 U 是 P 的一个开集，$x_1, \cdots, x_n$ 是 U 上的坐标。令

$$y_i = f_{\frac{\partial}{\partial x_i}}, i = 1, \cdots, n,$$

则函数组

$$(x_1 \circ \pi_*), \cdots, (x_n \circ x_*), y_1, \cdots, y_n,$$

是 $\pi_x^{-1}(U) = T^*U$ 上的坐标。为了简化记号，下面我们把 $C^\infty(P)$ 中的元素 g 等同于 $C^\infty(T^*P)$ 中的元素 $g \circ \pi_*$。根据这一假定，

$$x_1, \cdots, x_n, \ y_1, \cdots, y_n$$

就是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上的坐标。若向量场 X 在 U 上的坐标表达式是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上有

(12.3) $\quad f_X = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i.$

对任意的 $x \in P$, $\xi \in T_x^* P$ 和 $v \in T_\xi(T^*P)$，我们有

$$\pi_*^T(v) = \sum_{i=1}^{n} dx_i(\pi_*^T(v)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x,$$

从而，利用 $\pi_0(v) = \xi$ 得

$$\alpha(v) = \langle \pi_0(v),\ \pi_*^T(v) \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i(\xi) dx_i(\pi_*^T(v)).$$

其中 $y_i(\xi) = \left\langle \xi, \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x \right\rangle$. 但是，

$$\begin{aligned} dx_i(\pi_*^T(v)) &= (\pi_*^* dx_i)(v) \\ &= (d(x_i \circ \pi_*))(v) \\ &= dx_i(v), \end{aligned}$$

所以在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上我们有

(12.4) $\quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i.$

12.5. **命题**. 设 α 是余切从 T^*P 上的一个 Liouville 形式，则 2-形式 $\omega = -d\alpha$ 是 T^*P 上的一个辛结构.

证. 事实上，根据(12.4)，若 $x_1, \cdots, x_n$ 是 P 的一个坐标邻域 U 上的坐标，则在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上有坐标 $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ 使

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i,$$

于是 ω 在 T^*P 的每一点处的秩都是 $2n$. 又因为它是一个闭形式，所以它是一个辛结构. 证完.

我们称 2-形式 $\omega = -d\alpha$ 为 T^*P 上的标准辛结构. 设 $U \subset P$ 是 P 的一个坐标邻域，$x_1, \cdots, x_n$ 是 U 上的坐标，则

$$x_i = x_i \circ \pi_* \text{ 和 } y_i = f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \qquad i = 1, \cdots, n,$$

是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上的辛坐标. 我们把它称为 T^*P 上由坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 诱导出的局部辛坐标.

标准辛结构在经典力学中起着很重要的作用. 利用 Legendre 变换使我们能把某一切从 TQ 上的 Lagrange 动力系统(参看 §9, 例 1)换为具有标准辛结构的余切丛 T^*Q 上的一个 Hamilton 向量场(参看文献[2]).

我们知道, 流形 P 上的任意一个微分 1-形式对应着向量丛 T^*P 的一个可微截面. 对任意的 $\beta \in \Omega^1(P)$, 我们把相应的截面记为 $\bar{\beta}$.

12.6. **命题.** T^*P 上的 Liouville 形式 α 可用下列性质来刻划: 对 P 上任意的微分 1-形式 β 有

$$\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T \quad (= \bar{\beta}^*(\alpha)).$$

证. 设 $u \in T_*P$ 且设 $\beta \in \Omega^1(P)$. 因为 $\pi_* \circ \bar{\beta}$ 是 P 的恒等映射, 我们有

$$(\pi_*^T \circ \bar{\beta}^T)(u) = u.$$

另一方面, 因为

$$\pi_0 \circ \bar{\beta}^T = \bar{\beta} \circ \pi,$$

于是由公式(12.2)得

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \bar{\beta}^T)(u) &= \langle (\pi_0 \circ \bar{\beta}^T)(u),\ (\pi_*^T \circ \bar{\beta}^T)(u) \rangle \\ &= \langle \bar{\beta}(x),\ u \rangle = \beta(u),\ (x = \pi_*(u)).\end{aligned}$$

于是证明了 $\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T$. 又因为对任意一点 $\xi \in T_x^*P$, 切空间 $T_\xi(T^*P)$ 由这样的向量 $\bar{\beta}^T(T_xP)$ 生成, 其中 $\beta \in \Omega^1(P)$ 且 $\bar{\beta}(x) = \xi$, 所以 α 由等式 $\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T$ 唯一确定. 证完.

设 P 和 Q 是两个流形, 并设

$$\varphi: P \longrightarrow Q$$

是一可微映射. 下面我们假定 φ 在局部上是一微分同胚. 于是, 对任意的 $x \in P$, φ_x^T 是从 T_xP 到 $T_{\varphi(x)}Q$ 上的一个同构. 于是我们有逆同构

$$(\varphi_x^T)^{-1}: T_{\varphi(x)}Q \longrightarrow T_xP.$$

上面这个同构的共轭映射定义了同构

$$T_x^*\varphi:\ T_x^*P \longrightarrow T_{\varphi(x)}^*Q.$$

于是我们可以定义一个从 T^*P 到 T^*Q 上的可微映射 $T^*\varphi$，使 $T^*\varphi$ 在每一纤维 T_x^*P 上的限制就是上面的 $T_x^*\varphi$。

于是，对任意的 $x\in P$，$u\in T_xP$ 和 $\xi\in T_x^*P$，我们有

(12.7) $\langle (T^*\varphi)(\xi),\ \varphi^T(u)\rangle = \langle \xi, u\rangle.$

若 $\beta\in \Omega^1(Q)$，则有

$$\langle (T^*\varphi)((\varphi^*\beta)_x),\ \varphi^T(u)\rangle = \langle (\varphi^*\beta)_x,\ u\rangle = \langle \beta_{\varphi(x)},\ \varphi^T(u)\rangle.$$

于是有，

$$(T^*\varphi)\circ\overline{(\varphi^*\beta)} = \bar{\beta}\circ\varphi.$$

12.8. 命题. 设 P 和 Q 是两个流形，α_P 和 α_Q 分别是 T^*P 和 T^*Q 上的 Liouville 形式. 设

$$\varphi:\ P\longrightarrow Q$$

是一可微映射，并设 φ 在局部上是微分同胚，则有

$$\alpha_P = \alpha_Q\circ(T^*\varphi)^T.$$

证. 事实上，由 (12.2) 和 (12.7)，对任意的 $\xi\in T^*P$ 和 $v\in T_\xi(T^*P)$ 有

$$\begin{aligned}
&(\alpha_Q\circ(T^*\varphi)^T)(v)\\
&= \langle (\pi_0\circ(T^*\varphi)^T)(v),\ (\pi_*^T\circ(T^*\varphi)^T)(v)\rangle\\
&= \langle (T^*\varphi)(\xi),\ (\varphi^T\circ\pi_*^T)(v)\rangle\\
&= \langle \xi,\ \pi_*^T(v)\rangle\\
&= \langle \pi_0(v),\ \pi_*^T(v)\rangle = \alpha_P(v).
\end{aligned}$$

所以等式成立. 证完.

推论. $T^*\varphi:\ T^*P\longrightarrow T^*Q$ 是一辛同态.

例. 利用作为辛流形的余切丛，我们就得到一批 Lagrange 叶结构的例子. 事实上，设 P 是一流形，我们取标准辛结构使 T^*P 成为辛流形. 取 P 的一个坐标邻域 U，设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 U 的坐标，则在 T^*P 的子流形 $\pi_*^{-1}(U)$ 上有由 $x_1,\cdots,x_n$ 诱导的辛坐标 $x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n$. 把 $\pi_*^{-1}(U)$ 看作辛流形. 令

$$E = \bigcap_{1\leq i\leq n}\ker dx_i,$$

则 E 是 $T(\pi_*^{-1}(U))$ 的一个可积 Lagrange 子丛，$\pi_*^{-1}(U)$ 的每一

纤维空间都是E的一片积分叶子，并且是$\pi_*^{-1}(U)$的一个 Lagrange 子流形，所以E在$\pi_*^{-1}(U)$上定义了一个 Lagrange 叶结构。

§ 13. 余切丛上的辛向量场

在这节中，P表示一个流形，α表示T^*P上的 Liouville 形式，ω表示标准辛结构$-d\alpha$。设U是P的一个坐标邻域，$x_1, \cdots, x_n$是U上的坐标。设$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$是由$x_1, \cdots, x_n$诱导的$\pi_*^{-1}(U)$上的辛坐标。令

$$C = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

则C是$\pi_*^{-1}(U)$上的一个向量场并且有$\pi_*^T \circ C = 0$，即C是一垂直向量场。显然，我们可以在P上定义一向量场，使该向量场在局部上具有上面的表达式。我们仍把这个向量场记为C。

13.1. 引理。符号不变，我们有

$$i(C)\omega = -\alpha, \quad i(C)\alpha = 0,$$
$$\theta(C)\alpha = \alpha, \quad \theta(C)\omega = \omega.$$

证。为验证第一个式子，可以选取局部辛坐标$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$使$\alpha = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$（参看 §12），然后直接计算便可。利用第一式有

$$i(C)\alpha = -i(C)^2\omega = -\omega(C, C) = 0.$$

因此第二个式子成立。又利用已证的一、二式有

$$\theta(C)\alpha = di(C)\alpha + i(C)d\alpha = -i(C)\omega = \alpha.$$

因此三式得证。最后，利用$\theta \circ d = d \circ \theta$得

$$\theta(C)\omega = -\theta(C)d\alpha = -d\theta(C)\alpha = -d\alpha = \omega.$$

证完。

13.2. 引理。对P上任一向量场X都有

$$Cf_X = f_X.$$

这里f_X如 §12 所定义。

证。我们利用公式(12.3)，在 P 上选取局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 和 T^*P 上的局部辛坐标 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$，使在局部上有

$$f_X = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i,$$

其中 a_i 是 P 上的函数在 T^*P 上的拉回。由 C 的定义有 $Ca_i = 0$，因此

$$Cf_X = \sum_{i=1}^{n} a_i C y_i = f_X.$$

证完。

13.3. **命题**. 设 X 是 T^*P 上的一个辛向量场，则

(*i*) 向量场 $X + [C, X]$ 是一 Hamilton 向量场而且

$$X + [C, X] = H_{\alpha(X)},$$

(*ii*) $[C, X]$ 是一辛向量场

证。根据引理 13.1 有 $\theta(C)\omega = \omega$, $i(C)\omega = -\alpha$，所以我们有

$$\begin{aligned} & i(X + [C, X])\omega \\ &= i(X)\omega + \theta(C)i(X)\omega - i(X)\theta(C)\omega \\ &= \theta(C)i(X)\omega \\ &= di(C)i(X)\omega + i(C)di(X)\omega. \end{aligned}$$

其中第一步等式我们利用了第二章的公式

$$i([X, Y]) = \theta(X)\circ i(Y) - i(Y)\circ\theta(X).$$

又因为

$$di(X) = \theta(X) - i(X)d,$$

且 X 是一辛向量场，所以 $i(C)di(X)\omega = 0$。再利用等式 $i(C)i(X) + i(X)i(C) = 0$ 得

$$\begin{aligned} i(X + [C, X]\omega) &= -di(X)i(C)\omega \\ &= di(X)\alpha = d(\alpha(X)). \end{aligned}$$

于是 $X + [C, X] = H_{\alpha(X)}$ 是一 Hamilton 向量场。而由 Hamilton 向量场的性质(§9)知它是一辛向量场，于是 $[C, X]$ 是一辛向量场。证完。

推论 1. 对任一函数 $f \in C^\infty(T^*P)$，我们有

$$\alpha(H_f) = Cf, \quad [C, H_f] = B_{(Cf-f)}.$$

证。事实上，直接计算得

$$\alpha(H_f) = i(H_f)\alpha = -i(H_f)i(C)\omega$$
$$= i(C)i(H_f)\omega = i(C)d_f = Cf.$$

再根据命题 13.3 有

$$[C, H_f] = H_{\alpha(H_f)} - H_f = H_{(Cf-f)}.$$

证完。

推论 2. 对任意的 $f, g \in C^\infty(T^*P)$，我们有

$$C\{f, g\} = \{Cf, g\} + \{f, Cg\} - \{f, g\}.$$

其中$\{,\}$是 Poisson 括号.

证。事实上，

$$C\{f, g\} = C(H_f g) = [C, H_f]g + H_f Cg$$
$$= \{Cf, g\} - \{f, g\} + \{f, Cg\}.$$

证完。

对任意的整数 r，令 E_r 是 $C^\infty(T^*P)$ 中所有满足

$$Cf = (r+1)f$$

的函数 f 所构成的集合. 于是，由 E_r 的定义知，E_r 中的元素是 T^*P 上这样的可微函数，它们在每一纤维 T_x^*P 上的限制是 $r+1$ 次的齐次多项式. 因此，若 $r < -1$，则我们有 $E_r = (0)$. 而空间 E_{-1} 则是在每一纤维上为常数的函数所构成的空间，也就是 $C^\infty(P)$ 的所有元素在 T^*P 上的拉回所构成的空间. 任给两个整数 r, s，我们有

$$E_r E_s \subset E_{r+s+1}.$$

又根据命题 13.3 的推论 2，对 $\forall f \in E_r, \forall g \in E_s$ 有

$$C\{f, g\} = (r+1)\{f, g\} + (s+1)\{f, g\} - \{f, g\}$$
$$= (r+s+1)\{f, g\}.$$

所以

$$\{E_r, E_s\} \subset E_{r+s}.$$

因此，所有 E_r 的和是 $C^\infty(T^*P)$ 的一个子代数，无论是对于结合代数结构或是对于由 Poisson 括号定义的 Lie 代数结构都对.

而且它是一Z-分级 Lie 代数。

设 $S(T^*P, \omega)$ 是辛流形 (T^*P, ω) 上的辛向量场集. 对任意的整数 r，记 S_r 为 $S(T^*P, \omega)$ 中满足

$$[C, X] = rX$$

的辛向量场 X 所构成的空间.

设 U 为 P 的一个开邻域，$x_1, \cdots, x_n$ 为 U 上的坐标，$x_1, \cdots, x_n$，$y_1, \cdots, y_n$ 是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上由 $x_1, \cdots, x_n$ 诱导出的辛坐标. 取 $X \in S_r$，并设在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上 X 有表达式

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + g_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

于是,在 T^*P 的开集 $\pi_*^{-1}(U)$ 中,由 C 的定义有

$$[C, X] = \sum_{i=1}^{n} (Cf_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} (Cg_i - g_i) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

但是 $[C, X] = rX$，所以有

$$Cf_i = rf_i, \ Cg_i = (r+1)g_i, \ i = 1, \cdots, n.$$

于是推出 f_i 和 g_i 限制在 T^*P 的,含于 $\pi_*^{-1}(U)$ 中的纤维上分别是 r 和 $r+1$ 次的齐次多项式函数. 特别地，这证明了，若 $r < -1$，则 $S_r = (0)$.

13.4. **命题**. 对任意的 $r \geqslant -1$ 和任意的 $f \in E_r$，我们有 $H_f \in S_r$.

证. 事实上,由命题 13.3 的推论 1 有

$$[C, H_f] = H_{(Cf-f)} = H_{rf} = rH_f.$$

所以 $H_f \in S_r$. 证完.

13.5. **命题**. 对任意的整数 $r > -1$，映射

$$H: f \longmapsto H_f, \ f \in C^\infty(T^*P),$$

(参看 §9) 诱导出从 E_r 到 S_r 上的一个同构. 该同构的逆同构是

$$X \longmapsto \frac{1}{r+1} \alpha(X), \quad X \in S_r.$$

证. 事实上,若 $f \in E_r$，则有

$$\alpha(H_f) = Cf = (r+1)f.$$

因为 $r > -1$，所以 $r+1 \neq 0$，所以该映射是一内射．它也是满射，这是因为若 $X \in S_r$，则有

$$\begin{aligned} C\alpha(X) &= \theta(C)i(X)\alpha \\ &= i([C, X])\alpha + i(X)\theta(C)\alpha \\ &= (r+1)\alpha(X), \end{aligned}$$

所以 $\alpha(X) \in E_r$，又根据命题 13.3 有

$$H_{\alpha(X)} = X + [C, X] = (1+r)X.$$

证完．

空间 E_{-1} 和 S_{-1}． 我们讨论一下两个特殊的空间：E_{-1} 和 S_{-1}．由 E_{-1} 的定义不难看出，T^*P 上的局部是常数的函数空间 $H^0(T^*P, R)$ 包含在 E_{-1} 中．利用正合序列 (9.3)

$$(0) \longrightarrow H^0(T^*P, R) \longrightarrow C^\infty(T^*P) \xrightarrow{H} S(T^*P, \omega) \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0),$$

得一序列

$$(13.6) \quad (0) \longrightarrow H^0(T^*P, R) \longrightarrow E_{-1} \xrightarrow{H} S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0).$$

我们有下面的结论：

13.7. **命题．** 序列 (13.6) 是一正合序列．

证．根据命题 13.3，对任意的 $X \in S_{-1}$ 有

$$H_{\alpha(X)} = 0.$$

于是函数 $\alpha(X)$ 在局部上是常数．因为 α 在 T^*P 的零截面上为零，所以有 $\alpha(X) = 0$．若 $X \in S_{-1}$ 且 X 在 $H^1(T^*P, R)$ 中的象为 0，则存在 $f \in C^\infty(T^*P)$ 使 $H_f = X$．又根据命题 13.3 的推论 1，

$$Cf = \alpha(H_f) = 0.$$

因此，序列 (13.6) 在 S_{-1} 处是正合的．现证映射

$$S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R)$$

是满射．令 σ 为向量从 T^*P 的零截面．映射 $\sigma \circ \pi_*$ 在 T^*P 上同伦于单位映射．于是同态

$$H^i(\pi_*): H^i(P, R) \longrightarrow H^i(T^*P, R)$$

实际上对任意的 i 都是同构. 所以在 $H^1(T^*P, R)$ 中出现的每一上同调类都含这样的一个形式 r, 它是 P 上某一闭 1-形式在 $(\pi_*)^*$ 下的象. 因为 C 是一垂直向量场, 所以 $\theta(C)r = 0$. 所以若 X 为 T^*P 上满足 $i(X)\omega = r$ 的辛向量场,则有

$$i([C, X])\omega = \theta(C)r - i(X)\theta(C)\omega = -i(X)\omega,$$

于是 $[C, X] = -X$ 且 $X \in S_{-1}$. 所以 r 的上同调类是 S_{-1} 的某一元素的象. 又序列在 E_{-1} 和 $H^0(T^*P, R)$ 处的正合性是显然的. 证完.

注. 正合序列 (13.6) 同构于下面的正合序列 $(0) \longrightarrow$

$$H^0(P, R) \longrightarrow C^\infty(P) \xrightarrow{d} Z^1(P) \longrightarrow H^1(P, R) \longrightarrow (0),$$

其中 $Z^1(P)$ 是 P 上的闭 1-形式所构成的空间, 而映射 $Z^1(P) \longrightarrow H^1(P, R)$ 是一个把闭 1-形式映为它所代表的上同调类的映射. 事实上, 我们定义空间 $\Omega^1(P)$ 到 T^*P 上的向量场空间的一个标准同构使对 $\forall Y \in T(T^*P)$ 有

$$[C, Y] = -Y$$

如下: 对任意的 $\beta \in \Omega^1(P)$, 定义 T^*P 上的向量场 X_β 使

$$i(X_\beta)\omega = (\pi_*)^*(\beta).$$

这个映射导出 $Z^1(P)$ 到 S_{-1} 上的一个同构, 把它记为 ρ, 则不难验证下图是一交换图 (习题):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(0) & \longrightarrow & H^0(T^*P, R) & \longrightarrow & E_{-1} & \xrightarrow{H} & S_{-1} & \longrightarrow & H^1(T^*P, R) & \longrightarrow & (0) \\
 & & \uparrow H^0(\pi_*) & & \uparrow (\pi_*)^* & & \uparrow \rho & & \uparrow H^1(\pi_*) & & \\
(0) & \longrightarrow & H^0(P, R) & \longrightarrow & C^\infty(P) & \longrightarrow & Z^1(P) & \longrightarrow & H^1(P, R) & \longrightarrow & (0).
\end{array}$$

Lie 代数 E_0 和 S_0. 设 $D(P)$ 是 P 上的向量场所构成的 Lie 代数. 在 §12 中, 我们定义了从 $D(P)$ 到 $C^\infty(T^*P)$ 内的一个线性映射

$$F: X \longmapsto f_X, \quad X \in D(P).$$

这是从 $D(P)$ 到 E_0 上的一个线性空间同构.

13.8. **引理.** 我们把 $C^\infty(P)$ 等同于 E_{-1}. 则对任意的 $X \in D(P)$ 和任意的 $g \in C^\infty(P)$, 有

$$\{f_X, g\} = Xg.$$

证．事实上，设 $x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n$ 是由 P 上的局部坐标诱导出的 T^*P 上的局部坐标，并且设

$$x=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则

$$f_X=\sum_{i=1}^{n} a_i y_i.$$

从而

$$\{f_X, g\}=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial g}{\partial x_i}=Xg.$$

证完．

因为 $\{E_0, E_0\}\subset E_0$，所以 E_0 对于由 Poisson 括号所定义的代数结构是一 Lie 代数．

13.9．**命题**．从 $D(P)$ 到 E_0 上的同构

$$F:\ X\longmapsto f_X$$

是一 Lie 代数同构．

证．事实上，设 $X, Y\in D(P)$，$g\in C^\infty(P)$，则

$$\begin{aligned}&\{\{f_X, f_Y\}, g\}\\ &=\{f_X,\{f_Y, g\}\}-\{f_X,\{f_x, g\}\}\\ &=X(Yg)-Y(Xg)=[X, Y]g=\{f_{[X,Y]}, g\}.\end{aligned}$$

这里，同引理 13.8 一样，我们把 $C^\infty(P)$ 等同于 E_{-1}．由 F 的定义可知，在局部坐标下有

$$\{f_X, f_Y\}-f_{[X,Y]}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

因此，由上面的计算可知

$$\{f_X, f_Y\}-f_{[X,Y]}$$

含于 Lie 代数 $C^\infty(T^*P)$ 的中心里，从而它是 T^*P 上的局部常数函数．又因为它含于 E_0 中，所以它等于 0，也就是说，F 是一 Lie 代数同构．证完．

设 $X\in D(P)$，我们定义 T^*P 上的一个 Hamilton 向量场 $T^*(X)$ 为

$$T^*(X)=H_{f_X}.$$

根据命题 13.5 和 13.9，映射

$$T^*: X \longmapsto T^*(X), \quad X \in D(P),$$

是从 Lie 代数 $D(P)$ 到 Lie 代数 S_0 上的一个同构. 对任一 $g \in C^\infty(P)$，我们有

$$T^*(X)g = H_{f_X}g = Xg, \quad X \in D(P).$$

于是 $T^*(X)$ 是 P 上的一个可投影 (Projectable) 向量场，而且它的投影是 X. 我们把向量场 $T^*(X)$ 称为 X 在 T^*P 中的拓展 (prolongement). 根据命题 13.3 的推论 1，对任意的 $X \in D(P)$ 都有

$$\alpha(T^*(X)) = Cf_X = f_X.$$

13.10. **命题.** 设 Y 是 T^*P 上的一个向量场，则 Y 为 P 上某一向量场的拓展的充分必要条件是

(i) $[C, Y] = 0$，

(ii) $\theta(Y)\alpha = 0$.

证. 设 Y 是 P 上的向量场 X 的拓展，即有 $Y = T^*(X)$. 那么，$Y \in S_0$，从而 $[C, Y] = 0$. 又

$$\begin{aligned}\theta(Y)\alpha &= di(Y)\alpha + i(Y)d\alpha \\ &= d(\alpha(Y)) + i(Y)d\alpha \\ &= df_X - i(H_{f_X})\omega = 0.\end{aligned}$$

于是必要性得证. 反之，若 Y 是 T^*P 上满足条件 (i) 和 (ii) 的向量场，则有

$$C\alpha(Y) = (\theta(C)\alpha)(Y) + \alpha([C, Y]) = \alpha(Y),$$

所以 $\alpha(Y) \in E_0$. 另一方面，因为 $\theta(Y)\alpha = 0$，我们有

$$d\alpha(Y) = i(Y)\omega.$$

于是

$$Y = H_{\alpha(Y)} \in S_0,$$

所以 Y 是 P 上某一向量场的拓展. 证完.

例. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 R^n 上的自然坐标，$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 是 T^*R^n 上由 $x_1, \cdots, x_n$ 诱导出的辛坐标. 若

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是 R^n 上的一个向量场,则它在 T^*R^n 上的拓展是

$$T^*(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{n}y_i\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

注. 若 $X\in D(P)$, 则由 $T^*(X)$ 所产生的任意一个流都是由 T^*P 的辛同构所构成的集合. 这些辛同构保持 Liouville 形式不变. 若 φ_t 是由 X 所产生的一个流, 根据 §12 的讨论可知 $T^*\varphi_t$ 是 T^*P 上由 $T^*(X)$ 产生的一个流.

空间 E_1 和 S_1. E_1 由 T^*P 上这样的函数构成, 这些函数在每一纤维 T_x^*P 上的限制是二次齐次多项式. 如果对任意的 $x\in P$, $g\in E_1$ 在 T_x^*P 上的限制都是非退化的, 则可将它看作 P 上的一个伪 Riemann 度量,并且我们可以用它来定义从余切丛 T^*P 到切丛 TP 上的一个同构如下: 设 $\xi\in T^*P$,并设 $\pi_*(\xi)=x$, 定义 T_xP 中的元素 g_ξ 为

$$g_\xi:\ v\longmapsto g(\xi,v),\ \forall v\in T_x^*P,$$

则映射

$$\varphi:\ \xi\longmapsto g_\xi,\quad \forall\xi\in T^*P,$$

就是从 T^*P 到 TP 上的一个同构. 若通过同构 φ 把 TP 等同于 T^*P, 则 Hamilton 向量场 Hg($\in S_1$) 称为由度量 g 激起的浪花 (spray). P 上的测地线是 Hg 的轨道在 P 上的投影. 注意到 $Hgg=\{g,g\}=0$, 可知向量场切于由方程 $g=a(a\in R)$ 所定义的超曲面.

§ 14. 余切丛的 Lagrange 子流形

设 P 是一流形, $\beta\in\Omega^1(P)$. 与 §12 一样, 我们用 $\bar\beta$ 来表示余切丛上相应于 β 的截面,则 $\bar\beta$ 是从 P 到 T^*P 内的一个浸入.

14.1. **命题.** 浸入

$$\bar\beta:\ P\longrightarrow T^*P$$

是一 Lagrange 浸入的充分必要条件是 β 是一个闭 1-形式.

证. 事实上,根据命题 12.6 我们有

$$\beta = \bar{\beta}^*(\alpha),$$

所以

$$d\beta = \bar{\beta}^*(d\alpha) = -\bar{\beta}^*(\omega).$$

其中 α 是 T^*P 的 Liouville 形式，因此，浸入 $\bar{\beta}$ 是迷向浸入当且仅当 $d\beta = 0$. 又因为

$$\dim P = \frac{1}{2}\dim T^*P,$$

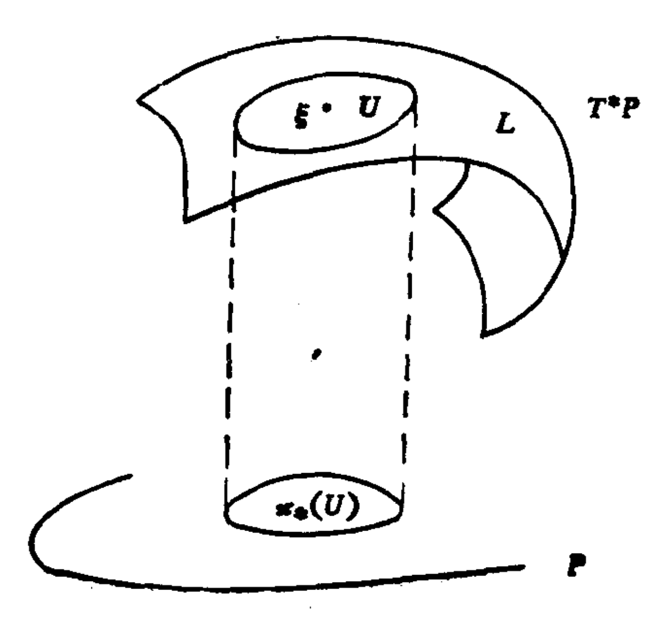
所以从 P 到 T^*P 内的迷向浸入必是 Lagrange 浸入. 于是 $\bar{\beta}$ 是一 Lagrange 浸入的充分必要条件是 $d\beta = 0$. 证完.

命题 14.1 的一个特殊的情形是，对任一函数 $f \in C^\infty(P)$，都有 T^*P 的一个 Lagrange 子流形与之相对应，即 $\overline{df}$ 的象. 我们把 $\overline{df}$ 的象称为是由 f 生成的 Lagrange 子流形，而称 f 为该子流形的一个**母函数**(fonction génératrice).

设 L 是 T^*P 的一个 Lagrange 子流形，ξ 是 L 的一个点使得 $T_\xi L$ 横截于 $T_\xi(T^*P)$ 的垂直向量空间，则映射

$$\pi_*: T^*P \longrightarrow P$$

限制在 L 所得到的映射 $\pi_*|L = \pi_1$ 在点 ξ 的切空间映射 $(\pi_1^T)_\xi$ 是一切空间同构. 于是知道有 ξ 在 L 中的一个开邻域 U 使限制映射 $\pi_1|U$ 是从 U 到 P 的开集 $\pi_*(U)$ 上的一个微分同胚(参看下面的示意图).



设 β 是 $\pi_*(U)$ 上的一个微分 1-形式使映射 $\bar{\beta}\circ\pi_*$ 为 U 上的单位映射，则 $\bar{\beta}$ 是从 $\pi_*(U)$ 到 U 上的 Lagrange 浸入. 根据命题 14.1，$d\beta = 0$. 于是存在点 $\pi_*(\xi)$ 在 P 中的一个开邻域 V 以及函数 $f \in C^\infty(V)$ 使得

$$df = \beta | V.$$

因此，$\overline{df}(V)$ 是 ξ 在 L 中的一个邻域，在这个邻域中，f 是一母函数.

大家自然要问，是不是 T^*P 中任意的 Lagrange 子流形在局部上都可以由一母函数生成？答案是否定的. 在 T^*P 中存在这样的 Lagrange 子流形，它们不是 T^*P 的截面，因而不能，即便是局部地，也不能由某一函数生成. 例如，T^*P 的每一纤维都是 T^*P 的一个 Lagrange 子流形. 事实上，Liouville 形式在每一纤维上的拉回等于零，所以 ω 在每一纤维上的拉回也是零，又每一纤维的维数都是 T^*P 的维数的一半，因而是 Lagrange 子流形. 这些 Lagrange 子流形不能由函数生成.

利用 P 上的一个函数来构造 T^*P 的 Lagrange 子流形的方法可推广如下. 我们不妨假定在 P 上存在整体的坐标 $x_1, \cdots, x_n$，不然，我们可以取 P 的一个坐标邻域来进行讨论. 设 $x_1, \cdots, x_n$，$y_1, \cdots, y_n$ 为 T^*P 上由 $x_1, \cdots, x_n$ 诱导出的辛坐标. 设 s 是一正整数，$a_1, \cdots, a_s$ 是 R^s 上的自然坐标. 我们考虑积流形 $P \times R^s$. 令

$$pr_1:\ P \times R^s \longrightarrow P$$

是投影映射，又设

$$F:\ P \times R^s \longrightarrow R$$

是 $P \times R^s$ 上的一个可微函数. 我们来定义投影 pr_1 的一个提升 (relèvement)

$$\gamma:\ P \times R^s \longrightarrow T^*P$$

使得

$$\pi_*\circ\gamma = pr_1,$$

$$y_i\circ\gamma = \frac{\partial F}{\partial x_i},\ i = 1, \cdots, n,$$

则 γ 是一可微映射.

令 N_F 为 $P\times R^s$ 中由下列方程所定义的点集:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=\frac{\partial F}{\partial a_2}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial a_s}=0.$$

我们假定在 N_F 上恒有

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right)\neq 0.$$

于是, N_F 是 $P\times R^s$ 的一个 n 维闭子流形, 而且 γ 在 N_F 上的限制是一浸入. 事实上, 对任意的 $x\in N_F$, $P\times R^s$ 上的一个向量场 X 在点 x 处与 N_F 相切的条件是

$$X_x\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\right)=0,\ i=1,\cdots,s.$$

换句话说, X_x 属于下面 s 个 1-形式的核的交集:

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right),\cdots,d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right).$$

于是, 根据 γ 的定义, $(\gamma|N_F)_x^T$ 的核是下列 1-形式的核的交集:

$$dx_i,\ d\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right),\ d\left(\frac{\partial F}{\partial a_j}\right),\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,s.$$

也就是下列 1-形式的核的交集:

$$dx_i,\ \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\ \partial a_k}da_k,\qquad \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 F}{\partial a_j\ \partial a_k}da_k,$$
$$i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,s.$$

因为在 N_F 上

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_j}\right),\ j=1,\cdots,s,$$

是无关的, 因此下面的 $s\times(n+s)$ 阶矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\ \partial a_k},\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_j\ \partial a_k}\right)$$

在 N_F 上的秩恒等于 s. 于是知道 $(\gamma|N_F)^T$ 的核是下列 1-形式的核的交:

$$dx_1,\cdots,dx_n,da_1,\cdots,da_s.$$

这就推出 $(\gamma|N_F)^T$ 的核仅含零向量，也即 $\gamma|N_F$ 是一浸入.

另一方面，对 T^*P 的 Liouville 形式

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i,$$

有

$$\gamma^*(\alpha) = \gamma^*\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i.$$

于是 $\gamma^*(\alpha)$ 在 N_F 上的拉回与 dF 在 N_F 上的拉回相同. 于是

$$\gamma^*(\omega)|N_F = \gamma^*(-d\alpha)|N_F = -d\gamma^*(\alpha)|N_F = 0.$$

所以 γ 在 N_F 上的限制是 N_F 到 T^*P 内的一个 Lagrange 浸入. 一般说来，这个浸入不是内射（参看例 2）. 如果是内射，则它的象 L 是 T^*P 的 Lagrange 子流形，$\alpha|L$ 是一正合 1-形式. 这时，我们也说 F 是 L 的一个母函数.

注. 考虑投影

$$pr_1:\ P \times R^s \longrightarrow P$$

在 N_F 上的限制 $pr_1|N_F$. 易知 $(pr_1|N_F)^T$ 的核是下列 1-形式的核的交:

$$dx_1, \cdots, dx_n,\ d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right), \cdots,\ d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right).$$

所以它最多是 s 维的. 如果我们把 Lagrange 浸入

$$\gamma:\ N_F \longrightarrow T^*P$$

和自然投影

$$\pi_*:\ T^*P \longrightarrow P$$

合起来，则得到一个在任意一点的秩至少是 $n-s$ 的映射.

例 1. 设 $S = n$. 设 $p \in P$, p 点的坐标是$(p_1, \cdots, p_n)$. 又设

$$F = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)\, a_i,$$

则

$$N_F = \{p\} \times R^n \subset P \times R^n,$$

并且

$$y_i \circ \gamma = a_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

也就是说，$\gamma|N_F$ 是从 N_F 到纤维 T_p^*P 上的同构。

例2. 设 $P=R$ 并且设 $s=1$，而

$$F=F(x,a)=\frac{a^3}{3}+(x^2-1)a,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial a}=x^2+a^2-1.$$

于是 N_F 是含于 $P\times R=R^2$ 中的单位圆．对任意的 $(p,t)\in R^2$，我们有

$$\gamma(p,t)=(p,2pt),$$

并且

$$\gamma(0,1)=\gamma(0,-1)=(0,0).$$

所以映射

$$\gamma:\ N_F\longrightarrow T^*R$$

不是内射．

我们知道，一般说来，T^*P 的 Lagrange 子流形即使在局部上也不一定能由 $C^\infty(P)$ 的某一函数生成，即在局部上也不一定是某一 $\overline{df}$ 的象，这里 $f\in C^\infty(P)$．但是，若 L 是 T^*P 的一个闭的 Lagrange 子流形，则在局部上，它可由我们刚才所叙述的方法构造出来．事实上，设 $\xi\in L$ 是任意的一点．根据命题 11.3，存在 ξ 在 T^*P 中的一个开邻域 U 和 U 上的辛坐标 $u_1,\cdots,u_n,\ v_1,\cdots,v_n$，使得 $v_1,\cdots,v_n$ 在 $L\cap U$ 上全为 0．根据引理 11.2，我们可以假定坐标 $u_1,\cdots,u_n,\ v_1,\cdots,v_n$ 有这样的性质，在 U 上任一点处

$$dx_1,\cdots,dx_n,\ du_1,\cdots,du_n$$

都是无关的．其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是 P 上的坐标．设 $x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n$ 是 P 上由 $x_1,\cdots,x_n$ 诱导出的辛坐标，则因为 $v_1,\cdots,v_n,\ u_1,\cdots,u_n$ 和 $x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n$（限制在 U 上）都是 U 上的辛坐标，所以形式

$$\sum_{i=1}^{n}(y_idx_i-v_idu_i)$$

是U上的一个闭形式. 因为任一闭形式在局部上都是正合的，所以我们可以假定存在T^*P上的可微函数F使在U上（必要时可将U适当缩小）有

$$dF|U=\sum_{i=1}^{n}(y_i dx_i - v_i du_i).$$

于是在U上有

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}=-\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial u_j}{\partial y_i},\ i=1,\cdots,n.$$

因为在 $L\cap U$ 上 $v_1,\cdots,v_n$ 全为0，所以在$L\cap U$上

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}=0,\ i=1,\cdots,n.$$

又

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial y_i}dv_j-\sum_{j=1}^{n}v_j d\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right),$$

所以在$L\cap U$上有

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial y_i}dv_j,\ i=1,\cdots,n.$$

但因为

$$dx_1,\cdots,dx_n,\ dy_1,\cdots,dy_n$$

在U上无关，所以$n\times n$阶矩阵

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)$$

在U的任意一点处都可逆，所以形式

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right),\ i=1,\cdots,n,$$

在$L\cap U$上是无关的. 利用辛坐标$x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n$把$T^*P$等同于$P\times R^n$，则构造出来的映射

$$\gamma:\ P\times R^n\longrightarrow T^*P$$

是一 Lagrange 浸入. 又由于在$L\cap U$上有

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=y_i,\ i=1,\cdots,n,$$

所以映射 γ 在 N_F 的开集 $L\cap U$ 上是单位映射.

正如 Weinstein 在文献[29]中所阐明的那样,通过 $P\times R'$ 上的一个可微函数来构造 T^*P 的 Lagrange 子流形的方法，是另一具有更为直观的几何意义的构造方法的特殊情形. 下面我们简述一下这一方法,想了解详细论证的读者可参看有关的文献.

设 Q 是一个流形,

$$\varphi:\ Q\longrightarrow P$$

是一子浸入. 设 N 是 T^*Q 中所有具有形式 $\xi\circ\varphi^T$ $(\xi\in T^*P)$ 的余切向量所构成的集合，则 N 是 T^*Q 的一个子向量丛. 若 $\dim P=n$ 且 $\dim Q=n+s$，则 $\dim N=2n+s$. 设

$$\mu:\ N\longrightarrow T^*P$$

是一可微映射使得

$$\mu(\eta)\circ\varphi^T=\eta$$

对所有的 $\eta\in N$ 成立,则可以证明:

1) 若 α_P 和 α_Q 分别是 T^*P 和 T^*Q 上的 Liouville 形式,则

$$\alpha_Q|N=\mu^*(\alpha_P).$$

又若 ω_P 和 ω_Q 分别是 T^*P 和 T^*Q 上的辛结构,则有

$$\mu^*(\omega_P)=\omega_Q|N.$$

2) N 对于辛结构 ω_Q 来说,是余迷向的.

设 F 是 Q 上的一个可微函数, L 是 $\overline{dF}$(dF 所对应的 T^*Q 的截面)在 T^*Q 中的象, 则 L 是 T^*Q 的一个 Lagrange 子流形. 若 L 和 N 有一"适用交",则可用收缩法在 T^*P 中构造一 Lagrange 子流形 (参看 §11). 对任意的 $\eta\in L\cap N$，存在 η 在 $L\cap N$ 中的一个开邻域 V 使 $\mu(V)$ 是 T^*P 的一个 Lagrange 子流形.

第四章　辛 G-空 间

在这章里，我们用G来表示一个 Lie 群，即G同时是一抽象群和一实解析流形，并且G的群运算与G的解析结构是相容的。所谓相容的，意思是指由

$$(x, y) \longmapsto xy^{-1}, \quad x, y \in G,$$

所定义的从$G \times G$到G上的映射是一实解析映射。

定义 1. 设M是一流形，如果可微映射

$$\gamma: G \times M \to M$$

满足下面的两条：

(i)　$\gamma(e, x) = x$,　$\forall x \in M$，e是G的单位元，

(ii)　若 $s_1, s_2 \in G$，则

$$\gamma(s_1, \gamma(s_2, x)) = \gamma(s_1 s_2, x), \forall x \in M,$$

则我们说G可微地作用在M上。

通常我们把G在M上的作用γ写成乘积的形式

$$\gamma(s, x) = sx, \ s \in G, \ x \in M.$$

若把$T(G \times M)$等同于 $TG \times TM$，则 Lie 群G在M上的可微作用的切空间映射γ^T可以看作是从 $TG \times TM$ 到TM内的可微映射，容易看出，这是群TG在流形TM上的一个作用，我们同样把它写成乘积的形式。我们把M（或G）等同于TM（或TG）的零截面的象。在这些假定下，若 $s \in G$，$x \in M$，$a \in T_sG$，$v \in T_xM$，则有

$$sv = \gamma^T(s, v) \in T_{sx}M,$$

$$ax = \gamma^T(a, x) \in T_{sx}M.$$

把G在单位元e处的切空间记为$\mathfrak{g}$，则对任意的$a \in \mathfrak{g}$和$x \in M$，我们有 $a_x \in T_xM$。映射

$$x \longmapsto ax, \quad x \in M,$$

对固定的 a 是M上的一个向量场，我们把它记为 Γ_a. 特别地，若 $M=G$ 且

$$\gamma:\ G\times G\to G$$

就是 Lie 群 G 的乘积，则对 $a\in\mathfrak{g}$,

$$\Gamma_a: s\longmapsto as,\quad s\in G,$$

是 G 上的一个右不变向量场，我们用专门的记号 R_a 来表示它. 显然，$R_a(e)=a$. 在 $\mathfrak{g}$ 上定义一括号运算 $[\,,]$ 使对任意的 $a, b\in\mathfrak{g}$ 有

$$R_{[a,b]}=[R_a, R_b]\ (=R_aR_b-R_bR_a),$$

则向量空间 $\mathfrak{g}$ 成为一实 Lie 代数，我们称它为 G 的 Lie 代数.

定义2. 设M是一流形，G是一 Lie 群，$\mathfrak{h}$ 是任意的一个有限维实 Lie 代数，则

(i) 若 G 可微地作用在M上，我们称M为一 G-**空间**.

(ii) 若存在从 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 到M的向量场 Lie 代数内的一个同态，我们称M为一 $\mathfrak{h}$-**空间**.

若 $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数，则对任一 G-空间 M，映射

$$\Gamma:\ a\longmapsto\Gamma_a,\quad a\in\mathfrak{g},$$

是从 $\mathfrak{g}$ 到M的向量场 Lie 代数 $D(M)$ 内的一个同态，从而M是一 $\mathfrak{g}$-空间. 我们把M的这一 $\mathfrak{g}$-空间结构称为伴随 $\mathfrak{g}$-空间结构.

注. 通常我们也从 Lie 群 G 上的左不变向量场出发来定义 G 的 Lie 代数，它和由右不变向量场定义的 G 的 Lie 代数没有什么本质的区别.

§15. 定义和例子

15.1. **定义.** 设M是一 G-空间. 若在M上有一在G的作用下不变的辛结构 ω，则我们称M为一**辛 G-空间**.

根据定义，若辛流形 (M, ω) 是一辛 G-空间，则对任意的 $s\in G$，微分同胚

$$s:\ x\longmapsto sx,\ x\in M,$$

是(M, ω)的一个辛自同构.

15.2. **定义.** 设$\mathfrak{h}$是一有限维实Lie代数，流形M是一$\mathfrak{h}$-空间。若M上存在辛结构ω使对任意的$a\in\mathfrak{h}$，向量场

$$\Gamma_a:\ x\longmapsto ax,\ x\in M,$$

都是(M, ω)的辛向量场，则我们称$\mathfrak{h}$-空间M为一辛$\mathfrak{h}$-**空间**.

设$\mathfrak{g}$是G的Lie代数，M是一G-空间，ω是M上的一个辛结构。因为M是一G-空间，所以M是一$\mathfrak{g}$-空间。若(M, ω)是一辛G-空间，则它也是一辛$\mathfrak{g}$-空间。事实上，任取$a\in\mathfrak{g}$，设

$$F:\ R\to G$$

是相应于a的G的单参数子群，即F是从实数加法Lie群R到G内的一个Lie群同态。对任意的$x\in M$，令

$$\varphi:\ (t,x)\longmapsto F(t)x,\ t\in R,$$

则映射

$$\varphi:\ R\times M\to M$$

满足条件

(i) $\varphi(0, x)=x,\ \forall x\in M$,

(ii) 映射：$t\longmapsto\varphi(t, x),\ t\in R$，对$\forall x\in M$都是向量场

$$\Gamma_a:\ x\longmapsto ax,\ x\in M,$$

的一条积分曲线.

事实上，对任意的$t\in R$有

$$\Gamma_a:\ \varphi(t, x)=aF(t)x.$$

又因为

$$F:\ R\to G$$

是相应于a的单参数子群，所以

$$\frac{dF(t)}{dt}=aF(t).$$

于是有

$$\frac{d\varphi(t, x)}{dt}=\frac{dF(t)}{dt}x=aF(t)x.$$

于是φ是由Γ_a产生的一个流。因为ω是G不变的，所以

$\varphi_t^*(\alpha)$ 不依赖于参数 $t\in R$. 根据引理 9.1 得

$$\theta(\Gamma_a)\omega = 0.$$

即 Γ_a 对任意的 $a\in\mathfrak{g}$ 都是一辛向量场. 这就证明了 (M,ω) 也是一辛 $\mathfrak{g}$-空间. 反之, 若 (M,ω) 是一辛 $\mathfrak{g}$-空间, 则在 G 是一连通 Lie 群时, (M,ω) 也是一辛 G-空间.

例 1. 设 P 是 G-空间,并设

$$\gamma : G\times P\to P$$

是相应的作用. 对任意的 $s\in G$,

$$\gamma_s:\ x\to sx,\quad x\in P,$$

是 P 的一个微分同胚. 采用 §12 中的记号,映射

$$T^*\gamma_s:\ T^*P\to T^*P$$

满足关系

$$\langle (T^*\gamma_s)(\xi),\ \gamma^T(u)\rangle = \langle \xi, u\rangle,\quad \forall\xi\in T_x^*P,\ u\in T_xP.$$

于是映射

$$T^*\gamma:\ (s,\xi)\longmapsto (T^*\gamma_s)(\xi),\quad s\in G,\ \xi\in T^*P,$$

定义了 G 在 T^*P 上的一个作用,我们也把它写成乘积的形式

$$T^*\gamma:\ (s,\xi)\longmapsto s\xi,\quad s\in G,\ \xi\in T^*P.$$

于是,对任意的 $(\xi,v)\in T^*P\underset{P}{\times} TP$ 和 $s\in G$ 有

$$\langle s\xi, sv\rangle = \langle \xi, v\rangle.$$

所以, 上面所定义的 G 在 T^*P 上的作用实际上是唯一满足这一等式的作用. 根据命题 12.8, 我们知道 T^*P 上的 Liouville 形式 α_P 在 G 的这一作用下不变. 因此,若 $\omega_P = -d\alpha_P$ 是 T^*P 上的标准辛结构,则 (T^*P,ω_P) 就是一辛 G-空间.

例 2. 设 $\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx_i\wedge dx_{n+i}$ 是 R^{2n} 上的标准辛结构. 在辛群 $Sp(2n)$ 的自然作用下,辛流形 $(R^{2n},\underline{\omega})$ 便是一辛 $Sp(2n)$-空间. 同样把 R^{2n} 看作 Lie 群,则在平移变换作用下, $(R^{2n},\underline{\omega})$ 是一辛 R^{2n}-空间.

若 (M,ω) 是一辛 G-空间, ω 在 G 的每一轨道上的拉回都是一常秩闭 2-形式. 但在一般情形下,该闭形式不一定是轨道上的

辛结构．我们有下面的引理。

15.3. **引理**. 设 (V, ω) 是一实辛向量空间，H 是 $Sp(V, \omega)$ 的一个紧子群，设 V^H 是由 V 中的 H 不动向量所构成的子空间，则 V^H 是 (V, ω) 的一个辛子空间.

证. 设 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 是 V 的一组辛基，定义 V 的一个线性映射 j 使

$$j(x_i) = x_{n+i}, \qquad i = 1, \cdots, n,$$
$$j(x_{n+i}) = -x_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

再定义 V 上的一个双线性型 b 如下:

$$b(x_1, x_2) = \omega(x_1, j(x_2)), \ \forall x_1, x_2 \in V,$$

则 b 是 V 上的一个正定对称双线性型．因为 H 是 $Sp(V, \omega)$ 的一个紧子群，所以由 §5 的结果知 b 在 H 的作用下不变，即对任意的 $s \in H$ 有

$$b(x_1, x_2) = b(sx_1, sx_2), \ \forall x_1, x_2 \in V.$$

令 F 是 V 中由

$$\{sx - x: s \in H, x \in V\}$$

所张成的子空间．因为 $H \subset Sp(V, \omega)$，所以对任意的 $x, y \in V$ 和 $s \in H$ 有

$$\omega(sx - x, y) = \omega(x, s^{-1}y - y).$$

特别地，若 $y \in V^H$，则有

$$\omega(sx - x, y) = 0.$$

因此，F 是 V^H 在 V 中对于 ω 的正交补．同样，由于 b 在 H 下不变，所以我们也有

$$b(sx - x, y) = b(x, s^{-1}y - y), \ \forall x, y \in V, s \in H.$$

于是，对于 b 来说，F 也与 V^H 正交．设 V^H 在 V 中对于 b 的正交补是 $(V^H)^\perp$，则

$$(V^H)^\perp = F.$$

于是

$$V^H \cap (V^H)^\perp = V^H \cap F = (0).$$

所以 V^H 是一辛子空间．证完．

15.4. **命题**. 设(M, ω)是一辛G-空间. 若G是一紧Lie群,则G不动点集

$$M^G=\{x\in M: sx=x \text{ 对所有 } s\in G\}$$

是(M, ω)的一个辛子流形.

证. 因为G是紧的,所以在M上可定义一个在G的作用下不变的 Riemann 度量g. 对于g,我们可以在TM的零截面的一个开邻域U上定义一个指数映射(参看文献[12])

$$\exp: U\to M.$$

因为g在G的作用下不变,所以对任意的$s\in G$和$v\in U$有

$$\exp(sv)=s(\exp v).$$

设$x\in M^G$, W_x是x在T_xM中的一个开邻域使$W_x\subset U$并且使$\exp$在W_x上的限制是从W_x到$\exp(W_x)$上的一个微分同胚,则

$$M^G\cap\exp(W_x)=\exp((T_xM)^G\cap W_x),$$

这里$(T_xM)^G$是T_xM中的G不动子空间. 于是M^G是M的一个子流形,并且对任意的$x\in M^G$有

$$T_x(M^G)=(T_xM)^G.$$

因为(M, ω)是一G-空间,所以对任意的$s\in G$和$x\in M^G$, T_xM的线性变换

$$v\longmapsto sv,\quad v\in T_xM,$$

是$Sp(T_xM, \omega_x)$的一个元素. 于是由引理15.3知

$$T_xM^G=(T_xM)^G$$

是(T_xM, ω_x)的一个辛子空间. 所以M^G是(M, ω)的一个辛子流形. 证完.

§ 16. Hamilton $\mathfrak{g}$-空间和矩射

下面我们用$\mathfrak{g}$来表示一个有限维实 Lie 代数.

16.1. **定义**. 设(M, ω)是一辛$\mathfrak{g}$-空间,若对任意的$a\in\mathfrak{g}$,向量场

$$\Gamma_a: x\longmapsto ax,\quad x\in M,$$

都是一 Hamilton 向量场，则称 (M, ω) 为一 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间.

若 (M, ω) 是一辛流形，则我们有一 Lie 代数正合序列 (9.3)

$$(0) \to H^0(M, R) \to C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \to (0),$$

而M上的 Hamilton 向量场就是属于H的象集的M的辛向量场. 因此，辛流形 (M, ω) 上的一个 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间结构，实际上是这样一个同态

$$\Gamma: \mathfrak{g} \to S(M, \omega),$$

它满足关系式

$$\rho \circ \Gamma = 0.$$

所以，若 $H^1(M, R) = (0)$，则上式恒成立，(M, ω) 上所有的辛 $\mathfrak{g}$-空间结构都是 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间结构. 因为作为 Lie 代数，$H^1(M, R)$ 的括号运算是零运算，所以若 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$，则从 $\mathfrak{g}$ 到 $H^1(M, R)$ 内的任一 Lie 代数同态都是零同态. 因此，若 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$，则 (M, ω) 上的所有辛 $\mathfrak{g}$-空间结构也都是 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间结构.

设映射

$$\iota: \mathfrak{g} \to S(M, \omega)$$

是一 Lie 代数同态，则 Γ 是辛流形 (M, ω) 上的一个 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间结构的充要条件也可叙述为：存在从 $\mathfrak{g}$ 到 $C^\infty(M)$ 内的一个线性映射 $\tilde{\Gamma}$ 使

$$\Gamma = H \circ \tilde{\Gamma}.$$

如果 $\tilde{\Gamma}$ 是任意一个从 $\mathfrak{g}$ 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射，则我们可以定义从 $C^\infty(M)$ 到 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 内的一个可微映射 μ 如下：对任意的 $a \in \mathfrak{g}$，$\mu(x)$ $(x \in M)$ 在 a 处的值为

$$\langle \mu(x), a \rangle = \tilde{\Gamma}(a)(x).$$

容易看出 $\mu(x)$ 是一意确定的. 于是，我们可以把 $a \in \mathfrak{g}$ 在 $\tilde{\Gamma}$ 下的象看作是下式所定义的M上的函数

$$\langle \mu, a \rangle: x \longmapsto \langle \mu(x), a \rangle, \ \forall x \in M.$$

若 Γ 是一 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间结构，则有

$$H_{\langle \mu, a \rangle} = \Gamma_a, \ \forall a \in \mathfrak{g}.$$

16.2. **定义.** 设 (M, ω) 是一 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间。 我们把任一满足关系式

$$H_{\langle\mu, a\rangle} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}$$

的可微映射

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

称为 $\mathfrak{g}$-空间 (M, ω) 的一个矩射.

16.3. **引理.** 设

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间 (M, ω)的一个矩射,则下面的等式

(i) $d\langle \mu, a\rangle = \langle d\mu, a\rangle = i(\Gamma_a)\omega$,

(ii) $\langle d\mu(ax), b\rangle = \omega(bx, ax)$,

(iii) $\langle d\mu(ax), b\rangle = \{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\}(x)$

对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 和 $x \in M$都成立.

证. 由定义有

$$i(\Gamma_a)\omega = i(H_{\langle\mu, a\rangle})\omega = d\langle \mu, a\rangle = \langle d\mu, a\rangle,$$

所以 (i) 成立. 由 (i) 有

$$\langle d\mu(ax), b\rangle = d\langle \mu, b\rangle(ax) = i(\Gamma_b)\omega(ax) = \omega(bx, ax),$$

所以 (ii) 成立. 又根据引理 9.8 有

$$\{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\} = \omega(H_{\langle\mu, b\rangle}, H_{\langle\mu, a\rangle}) = \omega(\Gamma_b, \Gamma_a),$$

所以

$$\{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\}(x) = \omega(bx, ax),$$

于是 (iii) 成立. 证完.

设 μ_1 和 μ_2 是 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间 (M, ω) 上的两个矩射, 则对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 都有

$$\langle d(\mu_1 - \mu_2), a\rangle = 0,$$

所以 $d(\mu_1 - \mu_2) = 0$。 于是 $\mu_1 - \mu_2$ 在局部是常值映射。 所以 (M, ω) 的矩射之间只差一局部常值映射。若 μ 是一矩射,而

$$\varphi: M \to \mathfrak{g}^*$$

是一局部常值映射,则因为 $H_{\langle\varphi, a\rangle} = 0$, $\forall a \in \mathfrak{g}$, 所以

$$H_{\langle\mu+\varphi, a\rangle} = H_{\langle\mu, a\rangle} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

因此 $\mu+\varphi$ 是一矩射．如果 (M, ω) 是一连通 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间，则 (M, ω) 的任意两个矩射只差 $\mathfrak{g}^*$ 的一个平移变换．

16.4 **命题**．设 μ 是 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间 (M, ω) 上的一个矩射，则对任意的 $a, b\in\mathfrak{g}$，函数

$$\{\langle\mu, a\rangle, \langle\mu, b\rangle\}-\langle\mu, [a, b]\rangle$$

是 M 上的一个局部常数函数．

证．事实上，根据引理 9.8 得

$$H_{\langle\mu,[a,b]\rangle}=\Gamma_{[a,b]}=[\Gamma_a, \Gamma_b]=[H_{\langle\mu,a\rangle}, H_{\langle\mu,b\rangle}]=H_{\{\langle\mu,a\rangle,\langle\mu,b\rangle\}},$$

所以结论成立．证完．

根据命题 16.4，对 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间 (M, ω) 的任意一个矩射 μ，我们可以在 $\mathfrak{g}$ 上定义一个取值于 $H^0(M, R)$ 中的反对称双线性映射 c_μ 如下：

$$c_\mu(a, b)=\{\langle\mu, a\rangle, \langle\mu, b\rangle\}-\langle\mu, [a, b]\rangle, \ \forall a, b\in\mathfrak{g}.$$

因为 Poisson 括号满足 Jacobi 恒等式，所以有

$$c_\mu([a, b], c)+c_\mu([b, c], a)+c_\mu([c, a], b)=0, \forall a, b, c\in\mathfrak{g}.$$

把 $H^0(M, R)$ 看作一个平凡 $\mathfrak{g}$-模，则上面的等式表明 c_μ 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 $H^0(M, R)$ 中的2-闭上链．若 $\mu'=\mu+\varphi$，$\varphi\in H^0(M, R)$，是 M 的另一矩射，则对任意的 $a, b\in\mathfrak{g}$ 有

$$c_{\mu'}(a, b)=c_\mu(a, b)-\langle\varphi, [a, b]\rangle.$$

这表明 $c_\mu-c_{\mu'}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 $H^0(M, R)$ 中的，由等式

$$f(a)=\langle\varphi, a\rangle, \ \forall a\in\mathfrak{g},$$

所定义的 1-上链的上边缘．于是知道，作为 $H^2(\mathfrak{g}, H^0(M, R))$ 中的一个元素，2-闭上链 c_μ 所对应的上同调类不依赖于 μ 的选取，它由 (M, ω) 的 $\mathfrak{g}$-空间结构决定．我们把它记为

$$\mathfrak{c}(M, \omega).$$

16.5. **定义**．设 (M, ω) 是一辛 $\mathfrak{g}$-空间，若同态

$$\Gamma:\ \mathfrak{g}\to S(M, \omega)$$

具有形式 $H\circ\tilde{\Gamma}$，其中

$$H:\ C^\infty(M)\to S(M, \omega)$$

如 (9.3)，而 $\tilde{\Gamma}$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 Lie 代数 $C^\infty(M)$（对于 Poisson 括号）内

的一个同态，则称 (M, ω) 为 Poisson $\mathfrak{g}$-空间，或强 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间。

为使一辛 $\mathfrak{g}$-空间 (M, ω) 是 Poisson 的，充分必要条件是存在 (M, ω) 的一个矩射 μ 使 $c_\mu = 0$，也就是 $c(M, \omega)$ 是 0。

若 $\mathfrak{g}$ 是一实半单 Lie 代数，则任一辛 $\mathfrak{g}$- 空间都是 Poisson 的. 事实上，这时任一辛 $\mathfrak{g}$-空间都是 Hamilton 的。根据 Whitehead 第二引理，

$$H^2(\mathfrak{g}, R) = (0)$$

(参看文献[13])。所以

$$H^2(\mathfrak{g}, H^0(M, R)) = H^2(\mathfrak{g}, R) \otimes H^0(M, R) = (0).$$

于是 $c(M, \omega) = 0$。

16.6. **命题**. 设 (M, ω) 是一辛 $\mathfrak{g}$-空间. 若在 M 上存在一微分 1-形式 α 使对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 都有

$$\theta(\Gamma_a)\alpha = 0, \quad \omega = -d\alpha,$$

则 (M, ω) 是一 Poisson $\mathfrak{g}$-空间.

证. 事实上，对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 我们有

$$d(\alpha(\Gamma_a)) = di(\Gamma_a)\alpha = \theta(\Gamma_a) - i(\Gamma_a)d\alpha = i(\Gamma_a)\omega,$$

所以 Γ_a 是一 Hamilton 向量场，并且我们可以把 Γ 写成

$$\Gamma = H \circ \tilde{\Gamma},$$

其中 $\tilde{\Gamma}$ 是满足

$$\tilde{\Gamma}_a = \alpha(\Gamma_a), \quad \forall a \in \mathfrak{g},$$

的从 $\mathfrak{g}$ 到 $C^\infty(M)$ 内的一个线性映射. 因此，利用第二章一开头我们引用的公式，得

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{[a,b]} &= i(\Gamma_{[a,b]})\alpha \\
&= i([\Gamma_a, \Gamma_b])\alpha \\
&= \theta(\Gamma_a)\, i(\Gamma_b)\alpha - i(\Gamma_b)\,\theta(\Gamma_a)\alpha \\
&= \theta(\Gamma_a)\,\alpha(\Gamma_b) = -\omega(\Gamma_a, \Gamma_b) = \{\tilde{\Gamma}_a, \tilde{\Gamma}_b\}, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g},
\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\Gamma}$ 是一 Lie 代数同态，因而 (M, ω) 是 Poisson 的。证完.

推论. 设 P 是一 $\mathfrak{g}$-空间. 记 $T^*(\Gamma_a)$ 为 $\Gamma_a\,(a \in \mathfrak{g})$ 在 T^*P 上的拓展，则映射

$$\Gamma^*: a \longmapsto T^*(\Gamma_a), \quad a \in \mathfrak{g},$$

是余切从 T^*P 上的一个 Poisson $\mathfrak{g}$-空间结构.

证. 利用命题 13.10 和命题 16.6. 证完.

例 1. 取 $\mathfrak{g} = R^2$, $\mathfrak{g}$ 的括号运算定义为零运算，并且利用关系式(x, y 是 R^2 上的自然坐标)

$$\Gamma_{(a,b)} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \quad a, b \in R,$$

在 $(R^2, dx \wedge dy)$ 上定义一辛 $\mathfrak{g}$-空间结构,则因为

$$\Gamma_{(a,b)} = H_{ay-bx},$$

所以这是 $(R^2, dx \wedge dy)$ 上的一个 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间结构. 由等式

$$\mu(x, y) = (y, -x)$$

所定义的从 $\mathfrak{g} = R^2$ 到 $\mathfrak{g}^* = R^2$ 内的映射是一矩射. 对任意的 (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&c_\mu((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\
&= \{\langle \mu, (a_1, b_1)\rangle, \langle \mu, (a_2, b_2)\rangle\} \\
&= \omega(\Gamma_{(a_2,b_2)}, \Gamma_{(a_1,b_1)}) \\
&= a_2 b_1 - a_1 b_2.
\end{aligned}$$

这是因为 $\mathfrak{g}$ 是一交换 Lie 代数. 又 c_μ 与矩射的选取无关,故 c_μ 非零. 所以 $\mathfrak{g}$-空间 $(R^2, dx \wedge dy)$ 不是 Poisson 的.

例2. 设

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是 R^{2n} 上的标准辛结构,而

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge x_{n+i}$$

是 R^{2n} 上的一个反对称双线性型.

对 R^{2n} 的任一自同态 a, 令 Γ_a 为 R^{2n} 上的线性向量场，使对 R^{2n} 上任意的线性型 f 都有

$$\Gamma_a f = f \circ a,$$

则对任意的 $a, b \in \mathrm{End}(R^{2n})$ 和 f 有

$$[\Gamma_a, \Gamma_b]f = \Gamma_a\Gamma_b f - \Gamma_b\Gamma_a f = f\circ b\circ a - f\circ a\circ b$$
$$= \Gamma_{(b\circ a - a\circ b)}f,$$

所以

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = \Gamma_{(b\circ a - a\circ b)}.$$

对 R^{2n} 的任一自同态 a，由 Γ_a 的定义有

$$i(\Gamma_a)\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{n}((x_i\circ a)dx_{n+i} - (x_{n+i}\circ a)dx_i).$$

因为

$$di(\Gamma_a)\underline{\omega} = \theta(\Gamma_a)\underline{\omega},$$

所以 $i(\Gamma_a)\underline{\omega}$ 是一闭 1-形式当且仅当 a 属于辛群 $Sp(2n)$ 的 Lie 代数 $sp(2n)$，也就是说，对任意的 $x, y\in R^{2n}$ 有（参看 §4）

$$\omega_0(a(x), y) + \omega_0(x, a(y)) = 0.$$

因此，映射

$$\Gamma: a\longmapsto \Gamma_a, \quad a\in sp(2n),$$

是 $(R^{2n}, \underline{\omega})$ 上的一个辛 $sp(2n)$-空间结构．因为 $sp(2n)$ 是一实半单 Lie 代数，所以 Γ 也是 Hamilton $sp(2n)$-空间和 Poisson $sp(2n)$-空间结构．设 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 是 R^{2n} 的自然坐标，则对任意的 $a\in sp(2n)$ 有

$$i(\Gamma_a)\underline{\omega} = d\left(\sum_{j,k=1}^{2n}\omega_0(a(e_j), e_k)x_jx_k\right).$$

这也直接证明了 $(R^{2n}, \underline{\omega})$ 是一 Hamilton $sp(2n)$-空间． 又我们有一二次矩射

$$\mu: R^{2n}\to (sp(2n))^*,$$

使得对任意的 $x\in R$ 有

$$\langle\mu(x), a\rangle = \omega_0(ax, x).$$

例 3. 设 $Q = R^3$ 是 3 维欧氏空间，q_1, q_2, q_3 是 Q 上的自然坐标．于是在切丛 TQ 上有坐标

$$q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1 = dq_1, \dot{q}_2 = dq_2, \dot{q}_3 = dq_3,$$

参看 §9 的例 1．若我们通过 Riemann 度量 $\sum_i dq_i^2$ 把 TQ 等同于

T^*Q，则 T^*Q 上的 Liouville 形式可写成

$$\alpha_Q = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i dq_i.$$

在 TQ 上取辛结构 $-md\alpha_Q$，这里 $m \in R$. 令 $gl(3)$ 为 Q 的自同态所构成的 Lie 代数，则我们在 Q 中有一自然的 $gl(3)$- 空间结构. 对任意的 $a \in gl(3)$，我们有

$$\Gamma_a = \sum_{i=1}^{3} (q_i \circ a) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

根据命题 16.6 的推论，对任一 $a \in gl(3)$，在 $T^*Q = TQ$ 中有相应于 Γ_a 的一个拓展 $T^*(\Gamma_a)$，并且可以在 $(TQ, -md\alpha_Q)$ 上定义一Poisson 空间结构使

$$\begin{aligned} & i(T^*(\Gamma_a))(-md\alpha_Q) \\ &= mdi(T^*(\Gamma_a))\alpha_Q \\ &= md\left(\sum_{i=1}^{3} (q_i \circ a)\dot{q}_i\right). \end{aligned}$$

于是我们有一矩射

$$\mu:\ TQ \to gl(3)^*,$$

它由下式决定

$$\langle \mu, a \rangle = m \sum_{i=1}^{3} (q_i \circ a) q_i,\ \forall a \in gl(3).$$

如果我们只考虑 Q 的正交群的 Lie 代数 $so(3)$，即仅限于考虑具有形状

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},\ a_1, a_2, a_3 \in R,$$

的 $gl(3)$ 的元素的集合，则我们在 TQ 上有一 Poisson $so(3)$-空间结构，而且对任意的 $a \in so(3)$ 有

$$\begin{aligned} \langle \mu, a \rangle = m(& a_1(q_2 q_3 - q_3 q_2) + a_2(q_3 q_1 - q_1 q_3) \\ & + a_3(q_1 q_2 - q_2 q_1)). \end{aligned}$$

其中 $a_i (i = 1, 2, 3)$ 的系数就是所谓的动力矩分量，这里的动力矩指的是位置和速度都可由 TQ 中的一个点来表示的，质量为 m

的质点关于原点的动力矩。我们所采用的矩射这一术语就来源于这个特殊情形。

例4. 设 $z_j = x_j + ix_{n+j}$，$j = 1, \cdots, n$，是 C^n 的自然坐标，$G = T^n$ 是 $U(n)$ 中由形如

$$\begin{pmatrix} e^{-ia_1} & & & \\ & e^{-ia_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-ia_n} \end{pmatrix}, \quad a_1, \cdots, a_n \in R,$$

的对角形矩阵所构成的子群，则可以把 G 的 Lie 代数等同于具有零括号运算的 Lie 代数 R^n。对应于 G 在 C^n 上的自然作用，在流形 C^n 上有一伴随 $\mathfrak{g}$-空间结构（$\mathfrak{g} = R^n$ 是 G 的 Lie 代数）。若

$$a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathfrak{g},$$

则有

$$\Gamma_a = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x_{n+j} \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} \right).$$

在 C^n 上取辛结构

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dx_{n+j}.$$

因为 ω 在 $U(n)$ 的作用下不变，从而它在 G 的作用下不变。对任一 $a \in \mathfrak{g}$，我们有

$$i(\Gamma_a)\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j dx_j + x_{n+j} dx_{n+j})$$

$$= \frac{1}{2} d\left(\sum_{j=1}^{n} a_j |z_j|^2 \right).$$

因此 (C^n, ω) 是一 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间。若把 $\mathfrak{g}^*$ 也等同于 R^n，则我们有矩射

$$\mu(z) = \frac{1}{2} (|z_1|^2, \cdots, |z_n|^2), \quad z \in C^n.$$

设

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_{n+j} dx_j - x_j dx_{n+j}),$$

则有

$$d\alpha = -\omega,$$

而且

$$i(\Gamma_a)\alpha = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j|z_j|^2, \ \forall a \in \mathfrak{g}.$$

于是

$$\theta(\Gamma_a)\alpha = di(\Gamma_a)\alpha - i(\Gamma_a)\omega = 0.$$

根据命题 16.6，(C^n, ω) 是一 Poisson $\mathfrak{g}$-空间.

16.7. **命题**. 设 (M, ω) 是一Hamilton $\mathfrak{g}$-空间，

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是 (M, ω) 的一个矩射，则对任意的 $x \in M$，$d\mu_x$ 的核是辛向量空间 (T_xM, ω_x) 中子空间

$$\mathfrak{g}x = \{ax: a \in \mathfrak{g}\}$$

的对于 ω_x 的正交补. 为使 μ 在点 x 处是一浸入，充分必要条件是 $\mathfrak{g}x = T_xM$.

证. 根据引理 16.3，对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in T_xM$，有

$$\langle d\mu(v), a\rangle = \omega(ax, v),$$

于是命题成立. 证完.

若 (M, ω) 的一个 $\mathfrak{g}$-空间结构是某一辛 G-空间结构的伴随结构，则空间 $\mathfrak{g}x$ 是点 x 的轨道 $G(x)$ 在 x 处的切空间. 为使 $\mathfrak{g}x = T_xM$，充分与必要条件是点 x 的轨道 $G(x)$ 是 M 的一个开集. 为使点 $x \in M$ 是矩射 μ 的一个平稳点，即要使 $d\mu_x = 0$，充分必要条件是 $\mathfrak{g}x = (0)$. 若 $\mathfrak{g}x = (0)$，则点 x 在 G 的单位连通分枝的作用下不动. 于是矩射在任一由 G 的不动点所构成的 M 的子流形上是常值映射.

16.8 **命题**. 设 (M, ω) 是一 Hamilton $\mathfrak{g}$-空间，

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是一矩射，则对任意的 $x \in M$，$d\mu_x$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的象是空间

$$\mathfrak{g}_x = \{a \in \mathfrak{g}: ax = 0\}$$

根据对偶在 $\mathfrak{g}^*$ 中的正交补. 为使 μ 在点 x 处为一子浸入，充分与

必要条件是 $\mathfrak{g}x=(0)$。

证。同命题 16.7 一样，利用

$$\langle d\mu(v), a\rangle = \omega(ax, v)$$

便可证明这个命题。证完。

若一 $\mathfrak{g}$-空间结构是某一辛 G-空间的附属结构，则 $\mathfrak{g}x$ 是点 x 的迷向子群

$$G_x = \{s\in G: sx = x\}$$

的 Lie 代数。为使 $\mathfrak{g}x=(0)$，充分与必要条件是 G_x 是 G 的一个离散子群。

注。设 G 是一紧 Lie 群，(M, ω) 是一连通的 Hamilton G-空间，则 M 所有的使 G 的轨道 $G(x)$ 具有极大维数的点 x 所构成的集合是 M 的一个稠开子集，设为 U.（M, ω）的任一矩射在 U 上是常秩的，其秩就等于 U 中点的轨道的维数. 若 G 还是可换的，并且在 M 上的作用有效，则对任一 $x\in U$ 有

$$\dim G(x) = \dim G.$$

从而 (M, ω) 的矩射在 U 上的限制是子浸入（比较例 1 和例 4）.

如果 G 是一连通的紧交换 Lie 群（即一环面），而且 (M, ω) 是一连通的紧 Hamilton G-空间，则 M 的 G 不动点集 M^G 只有有限个连通分枝，设它们是

$$K_1, \cdots, K_s.$$

若 μ 是 (M, ω) 的一个矩射，则它在每一 K_i 上是常值映射。可以证明（参看文献 [3]，[8]，[11]），这时 μ 的象是点集

$$\mu(K_i), i=1, \cdots, s,$$

在 $\mathfrak{g}^*$ 中的凸包络。

§ 17. 矩射的等价不变性

设 G 是一 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数，设 Ad 是 G 通常的在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示，即

$$Ad(s)a = sas^{-1}, \quad s\in G, a\in\mathfrak{g}.$$

设 ad 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示，即

$$ad(a)b = [a, b], \quad a, b \in \mathfrak{g}.$$

我们定义 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个余伴随表示 Ad^* 如下:

$$Ad^*(s) = {}^tAd(s^{-1}), \quad s \in G.$$

因为 $\mathfrak{g}$ 的括号是用 G 上的右不变向量场的括号来定义的，所以有

$$Ad(\exp a) = \exp(-ad(a)), \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

其中 exp 表示 G 的指数映射．于是

$$Ad^*(\exp a) = \exp{}^t(ad(a)), \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

设 (M, ω) 是一辛 G-空间． 若伴随的 $\mathfrak{g}$-空间结构是 Hamilton（或 Poisson）的，则我们称 (M, ω) 为 Hamilton（或 Poisson）G-**空间**.

若 M 是一 G-空间，对任一 $s \in G$，我们把 M 的微分自同胚

$$x \longmapsto sx, \quad x \in M,$$

记为 s_M.

17.1. 引理. 设 (M, ω) 是一 Hamilton G-空间且设

$$\mu: \ M \to \mathfrak{g}^*$$

是一矩射，则对任意的 $s \in G$，映射

$$\mu \circ s_M - Ad^*(s) \circ \mu: \ M \to \mathfrak{g}^*$$

是一局部常值映射.

证．对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\begin{aligned} d\langle Ad^*(s)\circ\mu, a\rangle &= \langle Ad^*(s)d\mu, a\rangle \\ &= \langle d\mu, Ad(s^{-1})a\rangle. \end{aligned}$$

又根据引理 16.3 的 (i)，对任意的 $x \in M$ 和 $v \in T_xM$ 我们有

$$\begin{aligned} &\langle d\mu(v), Ad(s^{-1})a\rangle \\ &= \omega(s^{-1}asx, v) = \omega(asx, sv) \\ &= \langle d\mu(sv), a\rangle = (d\langle \mu\circ s_M, a\rangle)(v). \end{aligned}$$

于是对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$d\langle Ad^*(s)\circ\mu, a\rangle = \langle d(\mu\circ s_M), a\rangle,$$

因此映射

$$\mu \circ s_M - Ad^*(s)\circ\mu$$

在局部上是常值的。证完。

17.2. **命题.** 设 (M, ω) 是一连通的 Hamilton G-空间，

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是 (M, ω) 的一个矩射，则

(i) 对任意的 $s \in G$，

$$\varphi_\mu(s) = \mu(sx) - Ad^*(s)\mu(x)$$

是 $\mathfrak{g}^*$ 中不依赖于点 $x \in M$ 的一个元素。

(ii) 对任意的 $s, t \in G$ 有

$$\varphi_\mu(st) = \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\varphi_\mu(t).$$

(iii) 对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$c_\mu(a, b) = \langle d\varphi_\mu(a), b\rangle,$$

c_μ 的定义见 §16.

证。因为M是连通的，利用引理 17.1 便可证明 (i)。根据 (i) 得

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(st) &= \mu(stx) - Ad^*(st)\mu(x) \\ &= \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\mu(tx) - Ad^*(s)Ad^*(t)\mu(x) \\ &= \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\varphi_\mu(t), \quad \forall s, t \in G,\end{aligned}$$

于是 (ii) 成立。微分定义 φ_μ 的等式得

$$d\mu(ax) = {}^t ad(a)\mu(x) + d\varphi_\mu(a), \quad x \in M, a \in \mathfrak{g}.$$

从而对任意的 $x \in M$ 和 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle d_\mu(ax), b\rangle = \langle \mu(x), [a, b]\rangle + \langle d\varphi_\mu(a), b\rangle.$$

但是根据引理 16.3 有

$$\langle d_\mu(ax), b\rangle = \{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\}(x),$$

因此

$$\begin{aligned}c_\mu(a, b) &= \{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\} - \langle \mu, [a, b]\rangle \\ &= \langle d\varphi_\mu(a), b\rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

证完。

推论. 从 $G \times \mathfrak{g}^*$ 到 $\mathfrak{g}^*$ 内的映射

$$(s, \xi) \longmapsto s\xi = Ad^*(s)\xi + \varphi_\mu(s), \quad s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

是 Lie 群 G 在向量空间 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个仿射作用.

对于 $\mathfrak{g}^*$ 的这一 G-空间结构,矩射

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是 G-等价不变的,即

$$\mu(sx) = s\mu(x) = Ad^*(s)\mu(x) + \varphi_\mu(s), \ \forall s \in G, x \in M.$$

证. 设 e 是 G 的单位元,则由定义有

$$(e, \xi) \longmapsto e\xi = Ad^*(e)\xi + \varphi_\mu(e)$$
$$= \xi + \mu(x) - \mu(x) = \xi, \ \forall \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

又由等式 (ii) 有

$$\begin{aligned}(s_1s_2)\xi &= Ad^*(s_1s_2)\xi + \varphi_\mu(s_1s_2)\\ &= Ad^*(s_1)Ad^*(s_2)\xi + \varphi_\mu(s_1) + Ad^*(s_1)\varphi_\mu(s_2)\\ &= Ad^*(s_1)(Ad^*(s_2)\xi + \varphi_\mu(s_2)) + \varphi_\mu(s_1)\\ &= s_1(s_2\xi), \ \forall s_1, s_2 \in G, \ \xi \in \mathfrak{g}^*.\end{aligned}$$

所以推论的前半部分成立. 而后半部分由 φ_μ 的定义便得. 证完.

注. 命题 17.2 表明 φ_μ 是 G 上取值于 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个 1-闭上链. 这种用矩射来定义的闭上链是一类特殊的闭上链(参看 §20). 一般说来, G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个作用即便其线性部分是 Ad^*, 也不一定能由某一矩射得到.

17.3. **命题.** 设 (M, ω) 是一连通的 Hamilton G-空间, 则 (M, ω) 是一 Poisson 空间的一个充分条件是存在 (M, ω) 的一个矩射 μ 使得对任意的 $s \in G$ 都有

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu.$$

若 G 是连通的,则该条件也是必要的.

证. 事实上,若存在 M 的矩射 μ 使

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s)\mu, \ \forall s \in G,$$

则对任一 $s \in G$ 有

$$\varphi_\mu(s) = 0.$$

于是根据命题 17.2 的 (iii) 得 $c_\mu = 0$. 所以 (M, ω) 是一 Poisson G-空间. 反之,若 (M, ω) 是一 Poisson G-空间,则存在 (M, ω) 的一个矩射 μ 使 $c_\mu = 0$. 根据命题 17.2 的 (iii) 得

$$d\varphi_\mu(a) = 0, \ \forall a \in \mathfrak{g}.$$

又由命题 17.2 的 (ii) 得

$$d\varphi_\mu(sa) = Ad^*(s)d\varphi_\mu(a) = 0$$

对任意的 $s \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 成立，所以 $d\varphi_\mu = 0$. 若 G 连通，则映射 φ_μ 是常值的. 但根据命题 17.2 的 (ii)，若 e 是 G 的单位元，则

$$\varphi_\mu(e) = \varphi_\mu(ee) = \varphi_\mu(e) + Ad^*(e)\varphi_\mu(e) = 2\varphi_\mu(e).$$

所以 $\varphi_\mu(e) = 0$, $\varphi_\mu = 0$. 所以

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu.$$

证完.

注1. 若 G 是一交换 Lie 群，则对任意的 $s \in G$ 都有

$$Ad^*(s) = id.$$

因此，对任一矩射 μ, φ_μ 都是从 G 到加法群 $\mathfrak{g}^*$ 内的可微同态. 若 G 还是紧连通的（即 G 是一环面），则 $\varphi_\mu = 0$ 且

$$\mu(sx) = \mu(x), \ \forall s \in G, \ x \in M.$$

因为矩射在每一 G 的轨道上是常值的，对任意的 $x \in M$，有

$$\mathfrak{g}x = \{ax: \ a \in \mathfrak{g}\} \subset \mathrm{Ker}\, d\mu_x.$$

根据命题 16.7 有

$$\mathrm{Ker}\, d\mu_x = (\mathfrak{g}x)^\perp.$$

所以 G 的轨道是迷向子流形.

注2. 若 (M, ω) 是一齐性 Hamilton G-空间，也就是说，对 M 的任意的两点 x_1, x_2，存在 G 的一个元素 s 使 $sx_1 = x_2$（G 在 M 上可递），μ 是 M 的一个矩射，则根据命题 16.7，μ 是一浸入. 由命题 17.2 的推论可知，这时映射

$$\mu: \ M \to \mu(M)$$

是 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的仿射作用（由 μ 定义）的某一轨道的一个覆盖 (revêtement).

注3. 有关本节的内容请读者参看文献[17]，[23].

第五章 Poisson 流形

§18. Poisson 流形的结构

Schouten-Nijenhuis 括号. 设M是一流形. 记M上的p阶反对称反变可微张量场空间为$D_p(M)$. 于是每一空间$D_p(M)$都是向量从$\wedge^p TM$的可微截面空间. 我们有

$$D_0(M)=C^\infty(M).$$

在外积$\wedge$所定义的运算下,

$$D_*(M)=\bigoplus_{p\geq 0}D_p(M)$$

是一Z-分级结合代数. 对任意的$u\in D_p(M)$和$v\in D_q(M)$, 外积$\wedge$满足下面的Z_2-交换律:

$$u\wedge v=(-1)^{pq}v\wedge u.$$

我们在$D_*(M)$上定义一个括号$[,]$,即双线性映射

$$[,]:\ D_*(M)\times D_*(M)\to D_*(M),$$

$$[,]:\ (u,v)\longmapsto[u,v],\quad u,v\in D_*(M),$$

要求它满足下列条件:

$$(1)\quad [f,g]=0,$$

$$\begin{aligned}(2)\quad &[f,X_1\wedge\cdots\wedge X_p]\\ &=(-1)^p[X_1\wedge\cdots\wedge X_p,f]\\ &=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(X_i\cdot f)X_1\wedge\cdots\hat{X}_i\cdots\wedge X_p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\quad &[X_1\wedge\cdots\wedge X_p,Y_1\wedge\cdots\wedge Y_q]\\ &=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{i+j}[X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\cdots\hat{X}_i\cdots X_p\wedge Y_1\wedge\cdots\\ &\quad\hat{Y}_j\cdots\wedge Y_q.\end{aligned}$$

其中 $f, g \in D_0(M) = C^\infty(M)$ 和

$$X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q \in D_1(M)$$

都是任意的，符号 $\hat{X}$ 表示把 X 去掉. 这样定义的括号是唯一的，我们把它称为 Schouten-Nijenhuis 括号（参看文献[20]）. 它限制在

$$D_1(M) \times D_1(M)$$

上与通常的向量场括号一样. 若 X 是一向量场且若 $f \in D_0(M)$，则

$$[X, f] = Xf.$$

对任意的整数 $p, q \geqslant 0$，若 $u \in D_p(M)$ 且 $v \in D_q(M)$，则有

$$[u, v] \in D_{p+q-1}(M),$$

而且

$$[u, v] = (-1)^{(p-1)(q-1)}[v, u].$$

对任意的 $u \in D_p(M)$，映射

$$adu: v \longmapsto [u, v], v \in D_*(M),$$

是分级结合代数 $D_*(M)$ 的一个 $p-1$ 阶的 Z_2-导子,即对任意的 $v \in D_q(M)$ 和 $w \in D_*(M)$ 有

$$[u, v \wedge w] = [u, v] \wedge w + (-1)^{(p-1)q} v \wedge [u, w].$$

Schouten-Nijenhuis 括号满足一带变号的 Jacobi 恒等式

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{(p-1)(q-1)}[v, [u, w]],$$
$$\forall u \in D_p(M), v \in D_q(M), w \in D_*(M).$$

把 $D_*(M)$ 的分级移动一位，即把 $D_p(M)$ 中的元素定义为 $p-1$ 级元素,则在 $D_*(M)$ 上得到一 Lie 超代数结构,它是一 Z-分级代数（参看定义 7.2).

如果 $u \in D_p(M)$ 且 $f \in D_0(M)$，则

$$-[f, u] = i(df)u.$$

若 $p > 0$，而且对使得 $df_1, \cdots, df_n$ 能生成 1-形式模 $\Omega^1(M)$ 的一组

$$f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(M),$$

有

$$[f_i, u] = 0,\ i = 1, \cdots, n,$$

则必有 $u = 0$。

在以后的讨论中，w 恒表示 $D_2(M)$ 中的一个元素，若无特别声明，总假设 w 是取定的.

根据 Schouten-Nijenhuis 括号的性质，对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$H_f := [f, w] = [w, f],$$

于是映射

$$H: f \longmapsto H_f,\ f \in C^\infty(M),$$

是从 $C^\infty(M)$ 到向量场空间 $D_1(M)$ 内的一个线性映射. 又对任意的 $X \in D_1(M)$ 和 $f \in C^\infty(M)$ 有

(18.1) $[X, H_f] = [X, [f, w]] = [Xf, w] + [f, [X, w]]$,

从而有

(18.2) $[X, H_f] = H_{Xf} + [f, [X, w]]$.

定义一个双线性映射

$$\{,\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

为

$$\{f, g\} = H_f g\ (= [[w, f], g]),\ \forall f, g \in C^\infty(M),$$

则对任意的 $f, g, h \in C^\infty(M)$ 有

(18.3) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

因为对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$[f, g] = 0,$$

所以

$$\begin{aligned}\{f, g\} + \{g, f\} &= [H_f, g] - [f, H_g] \\ &= [[w, f], g] - [f, [w, g]] \\ &= [w, [f, g]] = 0.\end{aligned}$$

所以得

(18.4) $\{f, g\} = -\{g, f\}$.

若 X, Y 是 M 上的两个向量场，则对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $\alpha \in \Omega^1(M)$ 有

$$\langle\alpha, [f, X\wedge Y]\rangle = \langle\alpha, [X\wedge Y, f]\rangle$$
$$= \langle\alpha, (Yf)X - (Xf)Y\rangle$$
$$= \langle\alpha\wedge df, X\wedge Y\rangle.$$

所以对任意的 $f\in C^\infty(M)$ 和 $\alpha\in\Omega^1(M)$ 有

(18.5) $\langle\alpha, [f, w]\rangle = \langle\alpha\wedge df, w\rangle.$

因此,对任意的 $f, g\in C^\infty(M)$ 有

$$\{f, g\} = [f, w]g = \langle dg, [f, w]\rangle = \langle dg\wedge df, w\rangle,$$

即

(18.6) $\{f, g\} = \langle dg\wedge df, w\rangle.$

设U是M的坐标邻域，$x_1, \cdots, x_n$ 是U上的坐标．设w在U上的坐标表达式是

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j},\quad c_{ij} = -c_{ji},$$

则对任意的 $f, g\in C^\infty(M)$，在U上有

$$H_f = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i},$$

并且

$$c_{ij} = \{x_i, x_j\},\quad i, j = 1, \cdots, n.$$

18.7. 引理． 下列条件是等价的:

(i) 对任意的 $f, g, h\in C^\infty(M)$,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

(ii) 对任意的 $f, g\in C^\infty(M)$,

$$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g].$$

(iii) 对任意的 $f\in C^\infty(M)$,

$$[H_f, w] = 0.$$

(iv) $[w, w] = 0.$

证．直接计算得

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$$

$$= H_f(H_g h) + H_g(-H_f h) - H_{\{f,g\}}h$$
$$= [H_f, H_g]h - H_{\{f,g\}}h.$$

因此 (i) 和 (ii) 等价.

若 $f \in C^\infty(M)$, 则

$$[H_f, w] \in D_2(M).$$

若对任意的 $g \in C^\infty(M)$ 有

$$[g, [H_f, w]] = 0,$$

则必有 $[H_f, w] = 0$. 利用

$$[H_f, H_g] - H_{\{f,g\}}$$
$$= [H_f, [g, w]] - [H_f g, w]$$
$$= [g, [H_f, w]],$$

便知 (ii) 和 (iii) 等价. 最后,根据等式

$$[f, [w, w]] = [[f, w], w] - [w, [f, w]]$$
$$= 2[[f, w], w] = 2[H_f, w],$$

得 (iii) 和 (iv) 等价. 证完.

注. 设

$$\mathscr{B} \subset C^\infty(M)$$

是一函数组,$\mathscr{B}$中所有函数的微分生成模$\Omega^1(M)$(例如,由M的坐标函数所构成的函数组),则引理 18.7 中的 (i), (ii) 和 (iii) 只要求对$\mathscr{B}$中的函数 f, g, h 成立. 若 $[w, w] = 0$, 则根据 (18.4) 和引理 18.7,括号$\{,\}$在 $C^\infty(M)$ 上定义了一 Lie 代数结构. 若M是一辛流形,即 $w = \omega$, 等式 (18.3) 表明, 这一括号对 $C^\infty(M)$ 的函数积的作用和 Poisson 括号一样.

18.8. **定义.** 设M是一流形,w是M上的一个反对称反变 2 阶张量,若w满足

$$[w, w] = 0,$$

则称w为M上的一个 Poisson 结构. 若w是M上的一个 Poisson 结构,则称 (M, w) 为 Poisson 流形.

流形M上任一 Poisson 结构w都在 $C^\infty(M)$ 中定义了一个括号$\{,\}_w$. 设 (M_1, w_1) 和 (M_2, w_2) 是两个 Poisson 流形,

$$\varphi:\ M_1 \to M_2$$
是一可微映射．若对任意的 $f, g \in C^\infty(M_2)$ 都有
$$\varphi^*\{f, g\}_{w_2} = \{\varphi^*(f),\ \varphi^*(g)\}_{w_1},$$
则 φ 称为从 (M_1, w_1) 到 (M_2, w_2) 内的一个同态．

注．若 w 是流形 M 上的一个 Poisson 结构，则对任意的 $f \in C^\infty(M)$，根据引理 18.7 有
$$[H_f, w] = 0,$$
这个等式说明，M 上由向量场 H_f 所生成的微分同胚流保持张量 w 不变。

§19. Poisson 流形的叶子

设 w 是流形 M 上的一个 Poisson 结构．对任意的 $x \in M$，定义线性映射
$$\gamma_x:\ T_x^*M \to T_xM,$$
使对任意的 $\xi, \eta \in T_x^*M$ 有
$$\langle \xi,\ \gamma_x(\eta) \rangle = \langle \xi \wedge \eta,\ w_x \rangle.$$
把 γ_x 的象记为 L_x，则对任一 $x \in M$，L_x 是 T_xM 的一个维数等于 w_x 的秩的向量子空间．L_x 的维数一般说来依赖于点 x，但总是偶数．我们保留 §18 中的记号．

19.1. **引理**．对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $x \in M$，我们有
$$H_f(x) \in L_x.$$

证．事实上，根据 (18.6)，对任意的 $g \in C^\infty(M)$ 有
$$\begin{aligned}(H_f g)(x) &= \{f, g\}(x) = \langle dg \wedge df,\ w \rangle(x) \\ &= \langle dg,\ \gamma_x(df_x) \rangle,\end{aligned}$$
所以
$$H_f(x) = \gamma_x(df_x) \in L_x.$$
证完．

若 w 在 M 上秩恒等于 $2p$，则对任意的 $x \in M$，向量空间 L_x 是由所有 $H_f (f \in C^\infty(M))$ 所生成的 TM 的一个可微子丛的纤维．

具体来说，若

$$f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(M)$$

在点 $x \in M$ 的某一邻域上是不相关的，则对该邻域里的任意一点 y，L_y 都是由

$$H_{f_i(y)}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

所生成的 T_yM 的向量子空间. 因为对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$，根据引理 18.7 有

$$[H_f, H_g] = H_{\{f,g\}}.$$

所以该向量子丛，记为 L，是 TM 的一个可积子丛. 因此，M是 L 的积分叶子的并集，即M是这样的子流形 F 的并集，这些 F 满足

$$T_xF = L_x, \ \forall x \in F,$$

并且在包含关系下，它们在M的所有满足这个等式的子流形中是极大的(参看文献[4]).

类似地，在 w 不是常秩的情形，我们也把M的任一满足

$$T_xF = L_x, \ \forall x \in F,$$

的极大子流形称为 Poisson 流形 (M, w) 的一片叶子.

19.2. **命题.** 设 F 是 Poisson 流形 (M, w) 的一片叶子，则存在唯一的一个 2-形式 $\omega_F \in \Omega^2(F)$ 使对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\omega_F(H_f|_F, H_g|_F) = \{g, f\}|_F.$$

又 ω_F 是 F 上的一个辛结构，对任意的 $f \in C^\infty(M)$，$H_f|_F$ 是对应于函数 $f|_F$ 的 F 上的 Hamilton 向量场.

证. 对任意的 $x \in F$ 和任意的 $\xi, \eta \in T_x^*M$，由 γ_x 的定义我们有

$$\langle \xi \wedge \eta, w_x \rangle = \langle \xi, \gamma_x(\eta) \rangle = -\langle \eta, \gamma_x(\xi) \rangle.$$

因此，当 ξ 和 η 中至少有一个属于映射

$$\gamma_x: T_x^*M \to T_xM$$

的核时，

$$\langle \xi \wedge \eta, w_x \rangle = 0.$$

因为

$$L_x = \gamma_x \ \text{的象},$$

所以我们可以在 L_x 上定义一个反对称双线性型 ω_x 如下： 对任意的 $u, v \in L_x$，设

$$u = \gamma_x(\xi),\ v = \gamma_x(\eta),\ \xi, \eta \in T_x^*M,$$

则 ω_x 在 (u, v) 的值定义为

$$\omega_x(\gamma_x(\xi),\ \gamma_x(\eta)) = \langle \xi \wedge \eta,\ w_x \rangle.$$

显然该值与 ξ, η 的选取无关，只依赖于

$$u = \gamma_x(\xi) \text{ 和 } v = \gamma_x(\eta).$$

因为对任意的 $x \in F$ 都有

$$L_x = T_x F,$$

所以在 F 上存在唯一的一个微分 2-形式 ω_F 使对任意的 $x \in F$ 有

$$(\omega_F)_x = \omega_x.$$

事实上，根据(18.6)，对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 我们有

$$\omega_F(H_f|_F, H_g|_F) = \langle df \wedge dg,\ w \rangle|_F = \{g, f\}|_F.$$

因为 F 上的向量场模由形如 $H_f|_F(f \in C^\infty(M))$ 的向量场所生成，所以上式唯一地确定了 ω_F。而且该等式表明 ω_F 是一微分形式，即

$$\omega_F \in \Omega^2(F).$$

对任意的 $x \in M$，根据 γ_x 的定义，Ker γ_x 是 T_x^*M 上的双线性型

$$b:\ (\xi, \eta) \longmapsto \langle \xi, \eta,\ w_x \rangle,\ \xi, \eta \in T_x^*M,$$

的核。因此 ω_F 的秩在 F 的任一点 x 处都等于 $\dim F = \dim L_x$。

下面我们证明 ω_F 是一闭微分形式。任取 $f, g, h \in C^\infty(M)$。为简化符号，把向量场 H_f, H_g, H_h 在 F 上的限制记为 $\underline{H}_f, \underline{H}_g, \underline{H}_h$。于是有

$$\begin{aligned}
&(\theta(\underline{H}_f)\omega_F)(\underline{H}_g, \underline{H}_h) \\
&= \underline{H}_f\omega_F(\underline{H}_g, \underline{H}_h) - \omega_F([\underline{H}_f, \underline{H}_g], \underline{H}_h) - \omega_F(\underline{H}_g, [\underline{H}_f, \underline{H}_h]) \\
&= \{f, \{h, g\}\} - \{h, \{f, g\}\} - \{\{f, h\}, g\} = 0.
\end{aligned}$$

所以对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\theta(\underline{H}_f)\omega_F = 0.$$

另一方面，对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 我们有

$$(i(\underline{H}_f)\omega_F)(\underline{H}_g) = \{g, f\}|_F = (df(H_g))|_F.$$

于是对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

(19.3)　$i(\underline{H}_f)\omega_F = (df)|_F = d(f|_F)$.

因此

$$i(\underline{H}_f)d\omega_F = \theta(\underline{H}_f)\omega_F = 0,\ \forall f \in C^\infty(M).$$

因为 $\underline{H}_f(f \in C^\infty(M))$ 生成F的向量场模,所以上式表明

$$d\omega_F = 0,$$

即 ω_F 是闭的．于是我们证明了 ω_F 是叶子 F 上的一个辛结构．又等式 (19.3) 说明 $H_f|_F$ 是 F 上相应于函数 $f|_F$ 的 Hamilton 向量场．证完．

推论．对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\{f, g\}|_F = \{f|_F, g|_F\}_F,$$

其中等式左边的括号是M上由 w 所定义的 Poisson 括号，而右边的括号是叶子 F 上由辛结构 ω_F 所定义的 Poisson 括号．

证．事实上，

$$\begin{aligned}\{f, g\}|_F &= \omega_F(H_f|_F, H_g|_F)\\ &= \omega_F(H_f|_F, H_g|_F)\\ &= \{f|_F, g|_F\}_F.\end{aligned}$$

证完．

若 w 是流形M上秩恒等于 $\dim M$ 的 Poisson结构,则

$$L = TM,$$

而且M是 Poisson 流形 (M, w) 的唯一的一片叶子,从而 ω_M 是M上的一个辛结构．由这一辛结构所定义的括号运算同由 Poisson 结构定义的括号运算是一样的．反之,若 ω 是流形M上的一个辛结构,则可利用它定义从 TM 到 T^*M 上的一个同构:

$$\varphi:\ v \longmapsto i(v)\omega,\ v \in TM.$$

从而导出从 $D_2(M)$ 到 $\Omega^2(M)$ 上的一个同构．在这一同构下, ω 的逆象是M上的一个秩恒等于 $\dim M$ 的 Poisson 结构 w, w 在叶子M上导出的辛结构与 ω 重合．

所以，辛结构是 Poisson 结构的特殊情形．命题 19.2 的推论表明,对 Poisson 流形 (M, w) 的任一片叶子 F, 恒等内射

$$i:\ F \to M$$

是一 Poisson 流形同态（在 F 上取由辛结构 ω_F 所定义的 Poisson 结构）。

可以证明（参看文献[15]），任一 Poisson 流形都是它的积分叶子的并集.

例. 设 X, Y 是流形 M 上的两个向量场，并令

$$w = X \wedge Y \in D_2(M).$$

于是

$$[w, w] = [X \wedge Y, X \wedge Y] = X \wedge [Y, X] \wedge Y + Y \wedge [X, Y] \wedge X$$
$$= 2[X, Y] \wedge X \wedge Y.$$

若 $[X, Y] = 0$，则 (M, w) 是一 Poisson 流形. 此时，对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\{f, g\} = (Yf)(Xg) - (Xf)(Yg),$$

而且

$$H_f = (Yf)X - (Xf)Y.$$

在一般情况下，在 M 上存在两种类型的叶子：退化为一点的叶子和 2 维叶子. 第一种类型的叶子是 M 的使

$$(X \wedge Y)_x = 0$$

的点 x，第二种类型的叶子构成了 M 的开集

$$U = \{x \in M: (X \wedge Y)_x \neq 0\}$$

上的一个叶结构.

§20. Lie 代数的对偶上的 Poisson 结构

在这节中，我们记 $\mathfrak{g}$ 为一 n 维实 Lie 代数，记 $a_1, \cdots, a_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 我们把 $\mathfrak{g}$ 等同于它自身的两次对偶 $(\mathfrak{g}^*)^*$，于是可把空间 $\mathfrak{g}$ 看成 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 的一个子空间，而把 $a_1, \cdots, a_n$ 看作 $\mathfrak{g}^*$ 上的坐标. 令

$$(20.1) \qquad w = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[a_i, a_j]\frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j}.$$

为了避免符号混淆，我们用 $[,]_S$ 表示 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 中的 Schouten-

Nijenhuis 括号，而 $\mathfrak{g}$ 自身的括号仍然用[,]表示。

20.2. **引理.** 由式(20.1)定义的张量 w 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Poisson 结构，而且，对由 w 定义的 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 中的 Poisson 括号{,}和任意的 $b, c\in\mathfrak{g}$ 有

$$\{b, c\} = [[w, b]_S, c]_S = [b, c].$$

证. 设

$$\xi_1, \cdots, \xi_n$$

是 $\mathfrak{g}^*$ 的一组对偶于 $a_1, \cdots, a_n$ 的基，则对任意的 $b\in\mathfrak{g}$ 有

$$\frac{\partial}{\partial a_i} b = \langle \xi_i, b\rangle, \quad i = 1, \cdots, n.$$

于是有

$$[w, b]_S$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left([a_i, a_j]\langle \xi_j, b\rangle \frac{\partial}{\partial a_i} - [a_i, a_j]\langle \xi_i, b\rangle \frac{\partial}{\partial a_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[b, a_i]\frac{\partial}{\partial a_i}.$$

因此对任意的 $b, c\in\mathfrak{g}$,

$$\{b, c\} = [[w, b]_S, c]_S = [b, c].$$

再根据 $\mathfrak{g}$ 中的 Jacobi 恒等式可推出 {,} 也满足 Jacobi 恒等式，由引理 18.7 和它下面的注可知

$$[w, w]_S = 0,$$

所以 w 是 $\mathfrak{g}^*$ 的一个 Poisson 结构. 证完.

我们可以用下面的条件来刻划张量 w(比较(18.6))：对任意的 $b, c\in\mathfrak{g}$ 有

$$\langle db\wedge dc, w\rangle = [c, b].$$

所以 w 不依赖于基 $a_1, \cdots, a_n$ 的选择，我们称它为 $\mathfrak{g}^*$ 上的标准 Poisson 结构。

设 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是两个 Lie 代数且设

$$\phi:\ \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$$

是一 Lie 代数同态. 如果我们在 $\mathfrak{g}_1^*$ 和 $\mathfrak{g}_2^*$ 上同取标准 Poisson 结

构，则由

$$\langle \phi(a), \xi\rangle = \langle a, \phi^t(\xi)\rangle, \quad \forall a \in \mathfrak{g}_1, \xi \in \mathfrak{g}_2^*,$$

定义的映射

$$\phi^t: \ \mathfrak{g}_2^* \to \mathfrak{g}_1^*$$

是一 Poisson 流形同态．特别，若 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数，则 $\mathfrak{g}^*$ 上的标准 Poisson 结构在 G 的余伴随表示下不变．

20.3. **命题**．设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数并设 G 连通，则 G 的余伴随表示的全部轨道就是 $\mathfrak{g}^*$ 的标准 Poisson 结构的全部叶子．

证．对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$，我们有

$$\begin{aligned} & b\,(Ad^*(\exp(ta))\xi) \\ & = \langle \exp^t(ad(ta))\xi, b\rangle \\ & = \langle \xi, b\rangle + t\langle \xi, [a, b]\rangle + t^2(\cdots). \end{aligned}$$

对 $a \in \mathfrak{g}$，设 Γ_a 是 $\mathfrak{g}^*$ 上相应于 a 的，在 G 的余伴随作用下的向量场

$$\Gamma_a: \ \xi \longmapsto a\xi, \ \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

则对任意的 $b \in \mathfrak{g}$ 有(把 b 看作 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数)

$$\Gamma_a b = [a, b].$$

但由引理 20.2 有

$$[a, b] = \{a, b\} = H_a b.$$

因此，对任一 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\Gamma_a = H_a.$$

对任意的 $\xi \in \mathfrak{g}^*$，由形如

$$H_f(\xi), \ f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

的向量构成的线性空间 L_ξ 与所有向量

$$\Gamma_a(\xi), \ a \in \mathfrak{g},$$

构成的线性空间相重合，即重合于轨道 $Ad^*(G)\xi$ 在点 ξ 的切空间．于是推出标准 Poisson 结构的任一片叶子在 $Ad^*(G)$ 的作用下不变，而且对 $Ad^*(G)$ 的任一轨道 θ 和任意的 $\xi \in \theta$ 有

$$T_\xi\theta = L_\xi.$$

由于 G 是连通的，所以 $Ad^*(G)$ 的所有轨道便是所有的叶子．证完．

推论. 设 G 是一连通 Lie 群，则 G 的余伴随表示的任一轨道 F 都具有唯一的一个辛结构 ω_F 使恒等浸入

$$i: F \to \mathfrak{g}^*$$

对于 $\mathfrak{g}^*$ 上的标准 Poisson 结构是一 Poisson 流形同态，又 ω_F 是 G 不变辛结构.

证. 直接应用命题 19.2 和它的推论便可.
证完.

在以下的讨论中，我们把上面推论里的辛结构 ω_F 称为轨道 F 上的标准辛结构.

20.4. **命题.** 设 G 是一连通 Lie 群且设 F 是 G 的余伴随表示的一个轨道. 设 ω_F 是 F 上的标准辛结构，则辛 G-空间 (F, ω_F) 是一 Poisson G-空间，而且恒等浸入

$$\mu: F \to \mathfrak{g}^*$$

是 (F, ω_F) 的一个矩射.

证. 事实上，根据命题 19.2，对任意的 $a \in \mathfrak{g}$，我们有

$$H_{\langle\mu, a\rangle} = H_a|_F = H_a|_F = \Gamma_a|_F.$$

于是对任意的 $\xi \in F$，

$$H_{\langle\mu, a\rangle}(\xi) = \Gamma_a(\xi).$$

这说明 (F, ω_F) 是一 Hamilton G-空间且 μ 是一矩射. 又显然 μ 是 G-等价不变的，所以由命题 17.3 得 (F, ω_F) 是一 Poisson G-空间. 证完.

20.5. **命题.** 设 (M, ω) 是一 Poisson G-空间，且设

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是 (M, ω) 的一个矩射使对任意的 $s \in G$ 和 $x \in M$ 有

$$\mu(sx) = Ad^*(s)\mu(x),$$

则对于 $\mathfrak{g}^*$ 上的标准 Poisson 结构，μ 是一 Poisson 流形同态.

证. 事实上，由假设 μ 是 G-等价不变的，根据命题 17.2，2 维闭上链 $c_\mu = 0$. 于是对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\{\mu^*(a), \mu^*(b)\} = \{\langle\mu, a\rangle, \langle\mu, b\rangle\}$$
$$= \langle\mu, [a, b]\rangle = \mu^*[a, b] = \mu^*\{a, b\}.$$

因为 $\mathfrak{g}$ 的一组基可看作 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个坐标系，所以由上式有

$$\mu^*\{f, h\} = \{\mu^*(f), \mu^*(h)\}, f, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

证完.

下面我们要证明，当 (M, ω) 只是一个 Hamilton G-空间而不一定是 Poisson 空间，在把 $\mathfrak{g}^*$ 上的标准 Poisson 结构换为由 G-空间 (M, ω) 所确定的一个 Poisson 结构的条件下，上述结论仍然成立（参看文献[17]，[23]）.

同前面一样，我们用 $a_1, \cdots, a_n$ 来表示 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 我们把映射

$$\varphi: \xi \longmapsto \sum_{i=1}^n \langle \xi, a_i \rangle \frac{\partial}{\partial a_i}, \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

称为从 $\mathfrak{g}^*$ 到 $\mathfrak{g}^*$ 的向量场空间内的一个标准线性映射. 由定义知 φ 在 $\mathfrak{g}^*$ 的平移变换下不变.

映射 φ 可以扩充为从外代数 $\wedge(\mathfrak{g}^*)$ 到 $\mathfrak{g}^*$ 的反对称反变张量代数 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 内的一个标准内射同态，使 $\wedge^p(\mathfrak{g}^*)$ 在这一同态下的象是 $\mathfrak{g}^*$ 上的在平移下不变的 p 阶反对称反变张量场空间. 事实上，若把 $\wedge^p(\mathfrak{g}^*)$ 等同于 $\mathfrak{g}$ 的反对称 p-形式空间 $A^p(\mathfrak{g})$，则 p-形式

$$\beta \in A^p(\mathfrak{g})$$

对应着一个张量场

$$\tilde{\beta} \in D_p(\mathfrak{g}^*),$$

$\tilde{\beta}$ 的坐标表达式是

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \cdots i_p} \beta(a_{i_1}, \cdots, a_{i_p}) \frac{\partial}{\partial a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial a_{i_p}},$$

其中指标 $i_1, \cdots, i_p$ 遍取所有整数 $1, \cdots, n$.

对任意的 $\alpha \in A^p(\mathfrak{g})$ 和 $\beta \in A^q(\mathfrak{g})$ 我们有

$$[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]_S = 0.$$

我们指出，对代数 $A(\mathfrak{g})$ 的 $+1$ 级 Z_2-导子 d 有等式

$$(d\beta)(a, b) = -\beta([a, b]),$$

其中 $\beta \in A^1(\mathfrak{g})$ 和 $a, b \in \mathfrak{g}$ 都是任意的. 事实上，该等式是下面

熟知的等式的直接结果：

$$(d\beta)(a, b) = a\beta(b) - b\beta(a) - \beta([a, b]).$$

d 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 R 中的上链复形的上边缘运算(参看文献[13])。

20.6 **命题.** 对任意的 $p \geqslant 0$ 和 $\beta \in A^p(\mathfrak{g})$ 我们有

$$[w, \tilde{\beta}]_s = -\widetilde{(d\beta)}.$$

其中 w 由 (20.1) 定义.

证. 因为映射

$$\rho: u \longmapsto [w, u]_s, \quad u \in D_*(\mathfrak{g}^*),$$

是代数 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 的一个 Z_2-导子,而

$$\varphi: \beta \longmapsto \tilde{\beta}, \quad \beta \in A(\mathfrak{g}),$$

是从代数 $A(\mathfrak{g})$ 到 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 内的同态，所以只需对 $\beta = \xi \in \mathfrak{g}^*$ 来验证等式. 若 $\xi \in \mathfrak{g}^*$, 则有

$$\tilde{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \langle \xi, a_i \rangle \frac{\partial}{\partial a_i},$$

$$\begin{aligned}
[w, \tilde{\xi}]_s &= -[\tilde{\xi}, w]_s \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \langle \xi, [a_i, a_j] \rangle \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} d\xi(a_i, a_j) \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j} \\
&= -\widetilde{(d\xi)}.
\end{aligned}$$

证完.

注. 我们有

$$2\widetilde{d^2\beta} = 2[w, [w, \tilde{\beta}]_s]_s = [[w, w]_s, \tilde{\beta}_s] = 0.$$

因此关系式 $d^2 = 0$ 只是 $[w, w] = 0$ 的另一种形式.

推论. 设 $\beta \in A^2(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个 2-上链，为使 $w - \tilde{\beta}$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Poisson 结构，充分必要条件是 β 是一 2-闭上链，即 $d\beta = 0$.

证. 事实上，我们有

$$[w - \tilde{\beta}, w - \tilde{\beta}]_s = [w, w]_s - [w, \tilde{\beta}]_s - [\tilde{\beta}, w]_s$$

$$= -2[w, \tilde{\beta}]_s$$
$$= 2\widetilde{(d\beta)},$$

所以

$$[w - \tilde{\beta}, w - \tilde{\beta}]_s = 0$$

的充要条件是 $d\beta = 0$. 证完.

于是 $\mathfrak{g}$ 上每一2-闭上链 β 都对应着 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Poisson 结构 $w - \tilde{\beta}$, 我们把 $w - \tilde{\beta}$ 在 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 中所定义的括号记为$\{,\}_\beta$. 它可以由下式来刻划:

$$\{a, b\}_\beta = [a, b] - [[\tilde{\beta}, a]_s, b]_s$$
$$= [a, b] + \beta(a, b), \ \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

设 G 是一 Lie 群, 而 $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数, β 是 $\mathfrak{g}$ 上的 2-闭上链, 则在一般情形下, Poisson 结构 $w - \tilde{\beta}$ 不一定是在 G 的余伴随表示的作用下不变的. 我们将看到, 若 G 是单连通的, 则 $w - \tilde{\beta}$ 在 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的某一仿射作用下是不变的, 该仿射作用的线性部分是 G 的一个余伴随表示.

20.7. **引理.** 设 $\beta \in A^2(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 R 中的 2-闭上链. 定义线性映射

$$\underline{\beta}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$$

使

$$\langle \underline{\beta}(a), b \rangle = \beta(a, b), \ \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

再利用对偶关系定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的表示 ad^* 为

$$-\langle ad^*(a)\xi, b \rangle = \langle \xi, ad(a)b \rangle,$$
$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \ \forall a, b \in \mathfrak{g},$$

则对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$ad^*(a)\underline{\beta}(b) - ad^*(b)\underline{\beta}(a) - \underline{\beta}([a, b]) = 0.$$

证. 事实上, 根据定义对任意的 $c \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle ad^*(a)\underline{\beta}(b) - ad^*(b)\underline{\beta}(a) - \underline{\beta}([a, b]), c \rangle$$
$$= -\beta(b, [a, c]) + \beta(a, [b, c]) - \beta([a, b], c)$$
$$= (d\beta)(a, b, c) = 0.$$

所以等式成立. 证完.

这个引理表明，若 β 是一2-闭上链，则 β 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于由 ad^* 所定义的 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{g}^*$ 中的1-闭上链．注意到对任意的 $a\in\mathfrak{g}$ 有

$$\langle \underline{\beta}(a), a\rangle = 0.$$

一般说来，在 $\mathfrak{g}$ 上存在取值于 $\mathfrak{g}^*$ 中的1-闭上链不满足这一条件，例如，当 $\mathfrak{g}$ 是一可换 Lie 代数时，$\mathfrak{g}$ 上便存在这样的1-闭上链．

20.8. **引理．** 设 $\mathfrak{g}$ 是单连通 Lie 群 G 的 Lie 代数，χ 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{g}^*$（表示是 ad^*）中的1-闭上链，则存在唯一的一个可微映射：

$$f:\ G\to\mathfrak{g}^*$$

使对任意的 $s, t\in G$ 和 $a\in\mathfrak{g}$ 都有

(i) $f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t)$,

(ii) $df(a) = \chi(a)$.

证．对任一 $a\in\mathfrak{g}$，令 L_a 为 G 上对应于 a 的左不变向量场

$$L_a:\ s\longmapsto sa,\ \forall s\in G.$$

设 α 是 G 上一个取值于 $\mathfrak{g}^*$ 中的微分1-形式使对任意的 $s\in G$ 和任意的 $a\in\mathfrak{g}$ 有

$$\alpha(sa) = Ad^*(s)\chi(a),$$

则我们有

$$\begin{aligned}\alpha(s\exp(ta)b) &= Ad^*(s)Ad^*(\exp(ta))\chi(b)\\ &= Ad^*(s)\chi(b) - tAd^*(s)ad^*(a)\chi(b) + t^2\cdots.\end{aligned}$$

从而在点 $s\in G$ 处，

$$L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a)$$

等于

$$-Ad^*(s)(ad^*(a)\chi(b) - ad^*(b)\chi(a)).$$

因为 χ 是一1-闭上链，所以我们有

$$\begin{aligned}&L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a)\\ &= -\alpha(L_{[a,b]}) = \alpha([L_a, L_b]).\end{aligned}$$

于是推出

$$\begin{aligned}(d\alpha)(L_a, L_b) &= L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a) - \alpha([L_a, L_b])\\ &= 0.\end{aligned}$$

这一等式对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 都成立，所以 $d\alpha = 0$. 又因为 G 是单连通的，所以存在唯一的一个从 G 到 $\mathfrak{g}^*$ 内的可微映射 f 使 $df = \alpha$ 且 $f(e) = 0$ (e 是 G 的单位元). 现对任意的 $s \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$df(sa) - Ad^*(s)df(a) = \alpha(sa) - Ad^*(s)\alpha(a) = 0.$$

这说明

$$f(st) - f(s) - Ad^*(s)f(t)$$

与 t 无关，又当 $t = e$ 时它等于 0，所以 f 满足条件 (i) 和 (ii). 反之，若 f 满足 (i) 和 (ii)，则

$$df(sa) = Ad^*(s)df(a) = Ad^*(s)\chi(a),$$

且 $f(e) = 0$，由此便导出唯一性. 证完.

20.9. **引理.** 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数且设

$$f: G \to \mathfrak{g}^*$$

是一可微映射使对任意的 $s, t \in G$ 有

$$f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t),$$

则

(i) 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 和 $t \in G$ 有

$$ad^*(a)f(t) = df(a) - Ad^*(t)df(Ad(t^{-1})a).$$

(ii) 对由关系式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f(s)$$

所定义的 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的仿射作用有

$$\Gamma_a b = [a, b] + \langle df(a), b\rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

证. 将等式

$$f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t)$$

分别对 s 和 t 求微分得

$$df(at) = df(a) - ad^*(a)f(t),$$

$$df(sa) = Ad^*(s)df(a), \quad \forall s, t \in G, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

在第二式中把 s 换为 t，把 a 换为 $Ad(t^{-1})a$ 得

$$df(at) = Ad^*(t)df(Ad(t^{-1})a).$$

再利用第一式便推出 (i).

把 $\mathfrak{g}$ 中的元素看作 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数，由等式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f(s),$$

得

$$b(s\xi) = \langle s\xi, b\rangle = \langle Ad^*(s)\xi + f(s), b\rangle, \ \forall s\in G, \ \xi\in \mathfrak{g}^*.$$

对 s 求微分得

$$\begin{aligned}(\Gamma_a b)(\xi) &= db(a\xi)\\ &= \langle -ad^*(a)\xi + df(a), b\rangle\\ &= \langle \xi, [a, b]\rangle + \langle df(a), b\rangle\\ &= ([a, b])(\xi) + \langle df(a), b\rangle,\end{aligned}$$

对任意的 $\xi\in\mathfrak{g}^*$ 和 $a, b\in\mathfrak{g}$ 成立. (ii) 得证. 证完.

现设 $\mathfrak{g}$ 是单连通 Lie 群 G 的 Lie 代数. 设 β 是 $\mathfrak{g}$ 的取值于 R 中的 2-闭上链, 设 $\underline{\beta}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上取值于 $\mathfrak{g}^*$ 中的 1-维上链使对任意的 $a, b\in\mathfrak{g}$ 有

$$\langle \underline{\beta}(a), b\rangle = \beta(a, b).$$

根据引理 20.8, 存在唯一的一个从 G 到 $\mathfrak{g}^*$ 中的可微映射 f_β, 使对任意的 $s, t\in G$ 和 $a\in\mathfrak{g}$ 有

$$f_\beta(st) = Ad^*(s)f_\beta(t) + f_\beta(s),$$

和

$$df_\beta(a) = \underline{\beta}(a).$$

于是可由等式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f_\beta(s), \ \forall s\in G, \ \xi\in\mathfrak{g}^*$$

来定义 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个仿射作用. 我们称这样定义的 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的仿射作用为附属于 2-闭上链 β 的作用. 另一方面, 根据命题 20.6 的推论, 我们知道, 由 2-闭上链 β 能决定一张量 $\tilde{\beta}\in D_2(\mathfrak{g}^*)$ 使 $w-\tilde{\beta}$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Poisson 结构.

20.10. **命题**. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数且设 β 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 R 中的 2-闭上链. 若 G 是单连通的, 则在 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的, 附属于 β 的仿射作用下, $\mathfrak{g}^*$ 上的 Poisson 结构 $w-\tilde{\beta}$ 是不变的.

证. 对任意的 $s\in G$, 令

$$s_{\mathfrak{g}^*}: \ \xi \longmapsto Ad^*(s)\xi + f_\beta(s), \ \forall \xi\in\mathfrak{g}^*$$

为 $\mathfrak{g}^*$ 中相应于 s 的仿射自同构. 记 $\{,\}_\beta$ 为 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 中由

Poisson 结构 $w-\tilde{\beta}$ 所定义的括号，则对任意的 $s\in G$ 和 $a\in\mathfrak{g}$ 有

$$s_{\mathfrak{g}}^*{}_*(a)=Ad(s^{-1})a+\langle f_\beta(s),a\rangle.$$

在上式中我们已把 $s_{\mathfrak{g}}^*{}_*(a)$ 当作 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数，并利用了定义（见§17）

$$Ad^*(s)={}^tAd(s^{-1}),\quad s\in G.$$

于是，根据引理 20.8 的 (ii) 有

$$\begin{aligned}&\{s_{\mathfrak{g}}^*{}_*(a),\ s_{\mathfrak{g}}^*{}_*(b)\}_\beta\\&=\{Ad(s^{-1})a,\ Ad(s^{-1})b\}_\beta\\&=Ad(s^{-1})[a,b]+\beta(Ad(s^{-1})a,Ad(s^{-1})b)\\&=Ad(s^{-1})[a,b]+\langle\underline{\beta}(Ad(s^{-1})a,Ad(s^{-1})b\rangle\\&=Ad(s^{-1})[a,b]+\langle Ad^*(s)df_\beta(Ad(s^{-1})a),b\rangle.\end{aligned}$$

又根据引理 20.9 的 (i) 得

$$Ad^*(s)df_\beta(Ad(s^{-1})a)=df_\beta(a)-ad^*(a)f_\beta(s).$$

因此对任意的 $s\in G$ 和 $a,b\in\mathfrak{g}$ 有

$$\begin{aligned}&\{s_{\mathfrak{g}}^*{}_*(a),\ s_{\mathfrak{g}}^*{}_*(b)\}_\beta\\&=Ad(s^{-1})[a,b]+\langle df_\beta(a),b\rangle+\langle f_\beta(s),[a,b]\rangle\\&=s_{\mathfrak{g}}^*{}_*([a,b])+\langle df_\beta(a),b\rangle\\&=s_{\mathfrak{g}}^*{}_*([a,b]+\beta(a,b))\\&=s_{\mathfrak{g}}^*{}_*\{a,b\}_\beta.\end{aligned}$$

这就证明了对任意的 $s\in G$，$s_{\mathfrak{g}*}$ 都是 Poisson 流形 $(\mathfrak{g}^*,w-\tilde{\beta})$ 的一个自同构。所以 Poisson 结构 $w-\tilde{\beta}$ 对于 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的附属于 β 的仿射作用是不变的。证完。

20.11. 命题. 条件与命题 20.10 相同．$\mathfrak{g}^*$ 的由 Poisson 结构 $w-\tilde{\beta}$ 所定义的全部叶子就是 G 的附属于 β 的作用所给出的全部轨道。

证。事实上，根据引理 20.8 我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_a b&=[a,b]+\langle df(a),b\rangle\\&=[a,b]+\beta(a,b)\\&=\{a,b\}=H_a b,\quad\forall a,b\in\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

这说明

$$\Gamma_a = H_a, \ \forall a \in \mathfrak{g}.$$

余下的证明和命题 20.3 的证明完全一样，证完.

推论. 对于由 G 的附属于 β 的仿射作用所给出的 $\mathfrak{g}^*$ 中的任一轨道 F，都有唯一的一个辛结构 ω_F 使恒等浸入

$$\mu: \ F \to \mathfrak{g}^*$$

对于 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Poisson 结构 $w - \tilde{\beta}$ 是一 Poisson 同态. 该辛结构 ω_F 在 G 的作用下不变. 又辛 G-空间 (F, ω_F) 是 Hamilton 的，μ 是一矩射.

证. 证明和 $\beta = 0$ 时的证明类似（命题 20.3 的推论及命题 20.4）. 证完.

设 (M, ω) 是一 Hamilton G-空间，并设

$$\mu: \ M \to \mathfrak{g}^*$$

是矩射. 在 §16 中，我们曾用 μ 定义了 $\mathfrak{g}$ 上取值于 R 中的一个 2-闭上链 c_μ

$$c_\mu(a, b) = \{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\} - \langle \mu, [a, b]\rangle \ \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

20.12. **命题.** 在 $\mathfrak{g}^*$ 上取 Poisson 结构 $w - \tilde{c}_\mu$，则矩射

$$\mu: \ M \to \mathfrak{g}^*$$

是一 Poisson 流形同态（参看文献[15]，[17]）.

证. 事实上，对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 我们有

$$\begin{aligned}
\{\mu^*(a), \mu^*(b)\} &= \{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, a\rangle\} \\
&= \langle \mu, [a, b]\rangle + c_\mu(a, b) \\
&= \mu^*([a, b] + c_\mu(a, b)) \\
&= \mu^*\{a, b\}_{c_\mu}.
\end{aligned}$$

证完.

我们已经知道（§17），若 G 按下面定义的方式作用在 $\mathfrak{g}^*$ 上：对任意的 $s \in G$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$，

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + \varphi_\mu(s),$$

其中

$$\varphi_\mu(s) = \mu(sx) - Ad^*(s)\mu(x), \ x \in M,$$

则矩射

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$$

是G-等价不变的．又根据命题 17.2 我们有

$$c_\mu(a, b) = \langle d\varphi_\mu(a), b\rangle, \ \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

所以

$$d\varphi_\mu = c_\mu.$$

这说明如果G是连通的，则G在$\mathfrak{g}^*$上的仿射作用可由G的单连通覆盖群的附属于闭上链c_μ的仿射作用通过作商而得到．

习题 1. 完成命题 20.11 及其推论的证明．

习题 2. 设$\mathfrak{g}$是单连通 Lie 群G的 Lie 代数且设β是$\mathfrak{g}$上取值于R中的 2-闭上链．

1）证明G在$\mathfrak{g}^*$中的附属于β的仿射作用的由$\mathfrak{g}^*$的原点给出的轨道$f_\beta(G)$的维数等于β的秩．

2）设β的秩等于 $\dim\mathfrak{g}$．在G上取左不变辛结构ω使对任意的 $a, b\in\mathfrak{g}$ 有

$$\omega(a, b) = \beta(a, b).$$

证明(G, ω)是一 Hamilton G-空间而且映射

$$f_\beta: G \to \mathfrak{g}^*$$

是(G, ω)的一个矩射．

3）仍假定β的秩等于 $\dim\mathfrak{g}$．定义$\mathfrak{g}$中的乘积

$$(a, b) \longmapsto ab, \ a, b\in\mathfrak{g},$$

使

$$\beta(ab, c) = -\beta(b, [a, c]), \ \forall a, b, c\in\mathfrak{g}.$$

证明对任意的 $a, b, c\in\mathfrak{g}$ 有

$$ab - ba = [a, b],$$

$$a(bc) - b(ac) = (ab)c - (ba)c.$$

即对于这一乘积，$\mathfrak{g}$在 Vinberg 的定义下是一“左辛”代数(参看文献[25])．

第六章　一个分级情形

§ 21. $(0,n)$ 维超流形　（参看文献 [18], [19]）

在这节里，我们把辛结构的观念推广到超流形上，下面先给出超流形，或者按 B. Kostant（参看文献 [18]）的说法，称为分级流形的定义。

21.1. **定义.** 设 M_0 是一 n_0 维的流形，设 A 是 M_0 上具有下列性质的一个 R-代数簇

（1）对任意的开集 $U\subset M_0$，$A(U)$ 是一 Z_2-分级代数

$$A(U)=A(U)_{\underline{0}}+A(U)_{\underline{1}},$$

其中 $\underline{0}$ 和 $\underline{1}$ 表示 Z_2 中仅有的两个元素；

（2）簇 A 局部同构于 M_0 上的可微函数簇和看作 Z_2-分级代数的外代数 $\Lambda(R^{n_1})$ $(n_1\in Z^+)$ 在 R 上所作的张量积；

则我们把 $M=(M_0, A)$ 称为一个 (n_0, n_1) 维的超流形，M_0 称为底空间.

根据定义，当开集 U 充分小时，我们有从 $A(U)$ 到 $C^\infty(U)\oplus\Lambda(R^{n_1})$ 上的一个同构，它将 $A(U)_{\underline{p}}$ $(\underline{p}\in Z_2)$ 映到

$$C^\infty(U)\otimes\sum_{p\equiv\underline{p}\ (\mathrm{mod}\,2)}\wedge^p(R^{n_1})$$

上.

下面我们仅限于讨论底流形 M_0 退缩为一个点 e 的特殊情形，这时 $M=(e, A)$的维数有形式$(0, n)$. 这样的一个超流形由一个点 e 和一个同构于 $\wedge(R^n)$ 的 Z_2-分级代数 A 构成. 对这种特殊的超流形，所涉及的只是纯代数问题，因此我们可以用任一特征为 0 的域 k 来代替 R 进行讨论.

我们把同构于 $\wedge(k^n)$ 的一个 Z_2-分级 k-代数称为 k 上的秩

为 n 的 Grassman 代数. 因此, 一个 Grassman 代数是一维数为 2^n 的 Z_2-交换代数, 它可由一组满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$$

的 1 级元素 $x_1, \cdots, x_n$ 所生成.

设 $M = (e, A)$ 是一 $(0, n)$ 维超流形. 我们称满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$$

的 A_1 中的元素组 $x_1, \cdots, x_n$ 为 M 上的坐标系. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 M 上的一个坐标系, 则 $x_1, \cdots, x_n$ 生成代数 A. 所以选定一个坐标系相当于给出从 A 到 $\wedge(k^n)$ 上的一个同构. 设 m 是 A 的极大理想, 即由 A_1 或 M 上的一个坐标系所生成的理想. 我们把向量空间 m/m^2 称为 M 上的余向量空间, 并把它记为 T_e^*M. T_e^*M 是一 n 维空间, 它的所有元素都是 1 级的. T_e^*M 的对偶空间

$$T_e M = (m/m^2)^*$$

称为 M 上的向量空间. 设 $\mathrm{Der}\,A$ 是由 A 的 Z_2-导子所构成的左 A-模, 则 $\mathrm{Der}A$ 的元素称为 M 上的向量场. 对任一 $X \in \mathrm{Der}A$ 和 $a \in A$, 记 Xa 为 a 在 X 下的象. 作为 k 上的向量空间, $\mathrm{Der}A$ 也是 Z_2-分级的. 若 $p \in Z_2$, 则 $(\mathrm{Der}A)_p$ 是 A 中满足

(1) $XA_q \subset A_{p+q}$, $q = 0, 1$,

(2) $X(ab) = (Xa)b + (-1)^{pq}(Xb)$, $\forall a \in A_q$, $\forall b \in A$,

的 k-自同态 X 的集合. 作为 A 上的左模, $\mathrm{Der}A$ 是一分级 A-模. 也就是说, 对任意的 $p, q \in Z_2$ 有

$$A_p(\mathrm{Der}A)_q \subset (\mathrm{Der}A)_{p+q}.$$

我们在 $\mathrm{Der}\,A$ 上定义一括号[,]如下

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{pq} Y \circ X,$$

$$\forall X \in (\mathrm{Der}A)_p,\ Y \in (\mathrm{Der}A)_q,$$

则 $\mathrm{Der}A$ 成为 k 上的一个 Lie 超代数 (参看 7.5).

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $M = (e, A)$ 上的坐标系, 则对 $i = 1, \cdots, n$, 存在唯一的一个 $P_i \in (\mathrm{Der}A)_1$ 使

$$P_i x_j = \delta_{ij}.$$

我们把P_i记为$\frac{\partial}{\partial x_i}$. 于是，$Z_2$-导子

$$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$$

构成 A-模 Der$A$ 的一组基,并且对 $i,j=1,\cdots,n$ 有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}=0.$$

设A是k上的一个 Grassman 代数(在我们的意义下)，且设E是一 Z_2-分级左 A-模. 因为A是 Z_2-交换代数，所以我们可以在E上定义一右A模结构使

$$xa=(-1)^{pq}ax,\ \forall x\in E_p,\ a\in A_q.$$

于是对任意的 $a,b\in A$ 和 $x\in E$ 有

$$a(xb)=(ax)b.$$

因此,所有Z_2-分级左 A-模都可定义成(A,A)上的双边模.

设E是一Z_2-分级左 A-模，我们用 $\mathrm{Hom}_A(E,A)$ 来表示这样的一个 Z_2-分级k向量空间，它里边的p级元素是满足下列条件的从E到A的k-线性映射φ:

(1) $\varphi(E_q)\subset A_{p+q}$,

(2) $\varphi(ax)=(-1)^{pq}a\varphi(x),\ \forall q\in Z_2,\ a\in A_q,\ x\in E.$

我们可以在 $\mathrm{Hom}_A(E,A)$ 上定义一 Z_2-分级左A模结构使

$$(a\varphi)(x)=a(\varphi(x)),\ \forall a\in A,\ x\in E,\ \varphi\in\mathrm{Hom}_A(E,A).$$

我们称 Z_2-分级A模

$$\Omega^1(M)=\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}A,A)$$

为超流形 $M=(e,A)$ 的微分 1-形式模. 可以证明存在唯一的一个k-线性映射

$$d:\ A\to\Omega^1(M)$$

使对任意的 $a\in A_p$ 和任意的 $X\in(\mathrm{Der}A)_q$ 都有

$$(da)(x)=(-1)^{pq}Xa.$$

我们有

$$dA_p\subset\Omega^1(M)_p.$$

又对任意的 $a, b \in A$ 有

$$d(ab) = (da)b + a(db).$$

这里,若 $a \in A_p$ 且 $b \in A_q$, 则记

$$(da)b = (-1)^{pq} b\,(da),$$

可以证明,若 $x_1, \cdots, x_n$ 是M上的坐标系,则 $dx_1, \cdots, dx_n$ 是A模 $\Omega^1(M)$ 的一组基.

现在我们来定义超流形 TM 和 T^*M.若A是一 Grassman 代数，则任一 Z_2-分级左A模都是一双边模，所以对任意的 $p \geqslant 1$，我们可以定义张量幂

$$\overset{p}{\otimes} E = \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{p\ 项}.$$

把所有 $\overset{p}{\otimes} E$ 的直和记为 $\otimes E$ 并赋予它通常的乘法，则 $\otimes E$ 也称为张量代数. 这是一双分级的代数，它是在 $Z \times Z_2$ 中分级的. 级数为 $(p, \underline{p})$ 的元素是 $\overset{p}{\otimes} E$ 中由下列形式的元素

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$$

其中 $u_i \in E_{\underline{p}(i)}$ 且

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \underline{p}(i) = \underline{p}$$

所张成的向量子空间中的元素.

设 I 是张量代数 $\otimes E$ 中由下列元素生成的双边理想:

$$u \otimes v - (-1)^{\underline{p}\underline{q}} v \otimes u, \quad u \in E_{\underline{p}}, \quad v \in E_{\underline{q}}.$$

令

$$S(E) = \otimes E / I,$$

则我们称代数 $S(E)$ 是 Z_2-分级的,A模E的对称代数. 由于 $\otimes E$ 是双分级的，所以 $S(E)$ 也是一双分级代数，它既在Z中有一分级,也在 Z_2 中有一分级. 对于 Z_2 分级,它是 Z_2-交换的.

若A是一秩为n的 Grassman 代数,E是一个具有由r个1级 (Z_2-分级) 元素构成的一组基的自由 Z_2-分级A模，则对称代数 $S(E)$ 对于在 Z_2 中的分级，是一秩为 $n+r$ 的 Grassman 代数. 特别地，$S(\mathrm{Der}A)$ 和 $S(\mathrm{Hom}_A^1(\mathrm{Der}A, A))$ 是两个秩为 $2n$

的 Grassman 代数.

若 $M=(e,A)$ 是一 $(0,n)$ 维的超流形，则我们称超流形 $(e,S(\Omega^1(M)))$ 为M的切超流形并把它记为 TM，而把超流形 $(e,S(\mathrm{Der}A))$称为M的余切超流形并把它记为 T^*M.超流形 TM 和 T^*M 都是$(0,2n)$维的. 标准内射同态

$$A\to S^0(\mathrm{Der}A)\subset S(\mathrm{Der}A)$$

可看作超流形M和 TM 之间的同态,而标准内射

$$A\to S^0(\Omega^1(M))\subset S(\Omega^1(M))$$

可以看作超流形M和 T^*M 之间的同态.

我们现在来定义超流形 $M=(e,A)$ 上的微分形式线丛 (complexe) $\Omega(M)$. 令

$$\Omega^0(M)=A,$$

$$\Omega^1(M)=\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}A,A).$$

对于 $p>1$，定义 $\Omega^p(M)$如下:

(1) $\Omega^p(M)$ 是 $\mathrm{Hom}_A(\overset{p}{\otimes}\mathrm{Der}A,A)$ 的一个子模，

(2) 对 $1\leqslant i\leqslant p$，若 $\varphi\in\Omega^p(M)$，则

$$\varphi(X_1\otimes\cdots\otimes X_i\otimes X_{i+1}\otimes\cdots\otimes X_p)$$
$$=-(-1)^{p_ip_{i+1}}\varphi(X_1\otimes\cdots\otimes X_{i+1}\otimes X_i\otimes\cdots\otimes X_p)$$

对任意的 $X_1,\cdots,X_p\in\mathrm{Der}A$ (X_i, $1\leqslant i\leqslant p$, 的 Z_2 级数是 p_i) 成立. 我们把 $\varphi\in\Omega^p(M)$ 看作从 $(\mathrm{Der}A)^p$ 到 A 内的映射并记

$$\varphi(X_1\otimes\cdots\otimes X_p)=\varphi(X_1,\cdots,X_p).$$

A模 $\Omega^p(M)$是 $\mathrm{Hom}_A(\overset{p}{\otimes}\mathrm{Der}A,A)$的一个 Z_2- 分级子模,我们记 $\Omega^p_{\bar p}(M)$ 为由 $\Omega^p(M)$ 的 Z_2- 级数是 $\bar p$ 的元素构成的子空间. 于是 $\Omega^p_{\bar p}(M)$ 中的元素是$(p,\bar p)$级的微分形式.

我们可以在

$$\Omega(M)=\bigotimes_p\Omega^p(M)$$

中定义一结合乘积

$$(\varphi,\psi)\longmapsto\varphi\wedge\psi,\quad\varphi,\psi\in\Omega(M)$$

定义的方法类似于定义两个反对称形式的外积(参看文献[18],

[21])。在这一乘积下，$\Omega(M)$ 是一 $Z \times Z_2$- 分级代数，即有

$$\Omega^p_{\underline{p}}(M) \wedge \Omega^q_{\underline{q}}(M) \subset \Omega^{p+q}_{\underline{p+q}}(M).$$

若

$$a \in A_p = \Omega^0_{\underline{p}}(M), \quad \phi \in \Omega^q_{\underline{q}}(M),$$

则我们有

$$a \wedge \phi = (-1)^{\underline{p}\underline{q}} \phi \wedge a = a\phi.$$

若

$$\varphi \in \Omega^p_{\underline{p}}(M), \quad \phi \in \Omega^q_{\underline{q}}(M),$$

则我们有

$$\varphi \wedge \phi = (-1)^{pq+\underline{p}\underline{q}} \phi \wedge \varphi.$$

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是M上的坐标。作为 k 上的代数，$\Omega(M)$ 由下列元素生成：

$$x_1, \cdots, x_n \in \Omega^0_{\underline{1}}, \ dx_1, \cdots, dx_n \in \Omega^1_{\underline{1}},$$

它们满足下列关系式：

$$x_i x_j + x_j x_i = 0,$$
$$x_i dx_j + dx_j x_i = 0,$$
$$dx_i \wedge dx_j - dx_j \wedge dx_i = 0.$$

这表明，作为左A模，$\Omega(M)$ 同构于

$$A \otimes_k k[T_1, \cdots, T_n],$$

其中 $k[T_1, \cdots, T_n]$ 是域k上不定元 $T_1, \cdots, T_n$ 的多项式代数。不难看出，若 $n \neq 0$，则对任意的 $p \geqslant 0$ 有 $\Omega^p(M) \neq (0)$.
若 $\Omega(M)$ 的一个k自同态γ满足

$$\gamma(\Omega^q_{\underline{q}}(M)) \subset \Omega^{p+q}_{\underline{p+q}}(M), \quad \forall (q, \underline{q}) \in Z \times Z_2,$$

则我们称它为 $\Omega(M)$ 的一个 $(p, \underline{p})$ 级自同态。若一个 $(p, \underline{p})$ 级的自同态γ满足

$$\gamma(\varphi \wedge \phi) = \gamma(\varphi) \wedge \phi + (-1)^{pq+\underline{p}\underline{q}} \varphi \wedge \gamma(\phi),$$

$$\forall \varphi \in \Omega_{\underline{q}}(M), \quad \phi \in \Omega(M),$$

则称其为 $\Omega(M)$ 上的 $Z \times Z_2$ 导子。可以证明 $\Omega(M)$ 中存在唯

一的一个(1, 0)级的 $Z \times Z_2$ 导子 d 使得

(1) $d^2 = 0$,

(2) $(da)(X) = (-1)^{pq} Xa$, $\forall a \in A_p, X \in (\mathrm{Der}A)_q$.

这个导子可以扩充为前面所定义的映射

$$d: A \to \Omega^1(M).$$

由 d 所定义的合成列是零调的,即序列

$$0 \to k \to A = \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

是一正合序列。

§22. (0, n) 维辛超流形

设 $M = (e, A)$ 是一 $(0, n)$ 维超流形,设微分形式 $\omega \in \Omega_0^2(M)$ 满足下面的条件:

(1) 若 $X \in \mathrm{Der}A$ 使 $\omega(X, Y) = 0$, $\forall Y \in \mathrm{Der}A$, 则 $X = 0$,

(2) $d\omega = 0$,

则我们称 ω 为M上的一个辛结构。

设 $X \in (\mathrm{Der}A)_p$, 记 $i(X)$ 为 $\Omega(M)$ 的一个由下式所定义的 $(-1, p)$ 级同态:

$$(i(X)\varphi)(Y_1, \cdots, Y_{q-1}) = (-1)^{pq}\varphi(X, Y_1, \cdots, Y_{q-1}),$$

其中 $\varphi \in \Omega_q(M)$, $Y_1, \cdots, Y_{q-1} \in \mathrm{Der}A$ 均是任意的。 可以证明 $i(X)$ 是一$(-1, p)$级的 $Z \times Z_2$- 导子。上面的条件(1)表明,对于辛结构 ω, 映射

$$X \longmapsto i(X)\omega, \ \forall X \in \mathrm{Der}A,$$

是一内射. 因此,若条件(1)成立,则映射

$$X \longmapsto i(X)$$

是从A模 $\mathrm{Der}A$ 到A模$\Omega^1(M)$上的一个同构.

设ω是M上的一个辛结构,则它在 T_eM 上导出一反对称双线性型 ω_e, 而且根据条件(1), ω_e 是非退化的.

22.1. **命题.** 设ω是 $M = (e, A)$ 上的一个辛结构, 则在M上存在坐标系 $x_1, \cdots, x_n$ 以及一个 $n \times n$ 阶的域k上的对称矩

阵 (λ_{ij}) 使

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

又 $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$.

这一结论类似于 Darboux 定理（§8），是文献 [18] 中定理 5.3 的一个基本的并且是特殊的情形.

我们称 M 上的一个向量场 $X \in \mathrm{Der}A$ 为辛向量场，若它满足 $di(X)\omega = 0$. M 上的辛向量场全体构成 Lie 超代数 $\mathrm{Der}A$ 的一个 Lie 子超代数 S. 可以证明（参看文献[14]），若 $n \geqslant 4$，则 S 是一单 Lie 超代数，也就是说，S 和(0)是 S 仅有的两个理想.

对任意的 $a \in A$，存在唯一的一个 $H_a \in \mathrm{Der}A$ 使

$$i(H_a)\omega = da.$$

H_a 是一辛向量场. 序列

$$(0) \to k \to A \xrightarrow{H} S \to (0)$$

是一正合列.

在 A 上定义一 Poisson 括号如下:

$$\{a, b\} = H_a b, \ \forall a, b \in A.$$

在这一括号下，A 成为一 Lie 超代数，它的中心是 k. 映射

$$H: a \longmapsto H_a, \ a \in A,$$

是一 Lie 超代数同态. 对任意的 $a \in A_p$, $b \in A_q$ 和 $c \in A$ 有

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{pq} b\{a, c\}.$$

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是M上的坐标，使得

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_i,$$

则对任意的 i 有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\omega = 2\,dx_i,$$

$$H_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_{x_i}}.$$

于是对 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 有

$$\{x_i, x_j\} = \frac{1}{2}\delta_{ij}.$$

T^*P 上的标准辛结构. 设 $P = (e, A)$ 是一 $(0, n)$ 维超流形。任意的

$$X \in \mathrm{Der}A = S^1(\mathrm{Der}A)$$

都可等同于 Grassman 代数 $S(\mathrm{Der}A)$ 的一个元素. 另一方面,对任意的 $X \in (\mathrm{Der}A)_p$, 存在 $S(\mathrm{Der}A)$ 的唯一的一个 Z_2-分级级数是 p 的 Z_2-导子 $\tilde{X}$ 使

$$(1)\ \tilde{X}(a) = Xa,\ \forall a \in A = S^0(\mathrm{Der}A),$$

$$(2)\ \tilde{X}(Y) = [X, Y],\ \forall Y \in \mathrm{Der}A = S^1(\mathrm{Der}A).$$

导子 $\tilde{X}$ 对于 Z-分级是零级的. 又因为

$$T^*P = (e, S(\mathrm{Der}A)),$$

所以 $\tilde{X}$ 是 T^*P 上的一个向量场(即 X 的拓展). 若 $x_1, \cdots, x_n$ 是 P 上的坐标,我们把 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 看作 $S(\mathrm{Der}A)$ 中的元素并令

$$y_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, \cdots, n,$$

则 $x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$ 是 T^*P 上的坐标且

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij},\ \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} y_j = 0,\ i, j = 1, \cdots, n.$$

在 T^*P 上存在唯一的一个微分形式

$$\alpha \in \Omega_0^1(T^*P),$$

使对任意的 $X \in \mathrm{Der}A$ 有

$$\alpha(\tilde{X}) = X.$$

这一形式类似于 Liouville 形式.在坐标 $x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$ 下,我们有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i.$$

微分形式

$$\omega = -d\alpha = \sum_{i=1}^{n} -dy_i \wedge dx_i$$

是 T^*P 上的一个标准辛形式。 形式 ω_e 是标准同构于向量空间 $T_eP+(T_eP)^*$ 的向量空间 $T_e(T^*P)$ 上的对偶的中性形式（La forme ω_e est la forme neutre de dualité sur léspace $T_e(T^*P)$ qui est canoniquement isomorphe à $T_eP+(T_eP)^*$）。

参考文献

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, Foundations of mechanics, 2nd edition, Benjamin Cummings Reading, 1978.

[2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics. Nauka, Moscow, 1974.

[3] M. F. Atiyah, Convexity and commuting hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.*, **14**, 1—15, 1982.

[4] N. Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques, Hermann, Paris, 1971.

[5] C. Chevalley, Theory of Lie groups, Princeton Univ. Press, 1946.

[6] G. Darboux, Sue le probléme de Pfaff, *Bull. des Sc. math.*, 1882.

[7] J. J. Duistermaat, Fourier integral operators, *Courant Inst. of Math. Sci.*, New York, 1973.

[8] ——————, On the momentum map, IUTAM-ISIMM, Symposium on modern developments in analytical mechanics, Torino, 1982.

[9] C. Godbillon, Géometrie différentielle et méchanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[10] V. Guillemin, S. Sternberg, The momentum map and collective motion, *Annals of Physic*, **127**, 220—253, 1980.

[11] ——————, Convexity properties of the momentum mapping, *Invent. Math.*, **67**, 491—513, 1982.

[12] S. Helgason, Differential geometry on symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.

[13] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1962.

[14] V. Kac, Lie superalgebras, *Adv. Math.* **26**, 8—96, 1977.

[15] A. A. Kirillov, Local Lie algebras, *Uspekhi Math. Nauk*, **31**, **4**, 55—76, 1976.

[16] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Interscience Publishers,, New York, 1969.

[17] B. Kostant, Quantization and unitary representations, Lectures Notes in Math., 170, Springer, Berlin, 1970.

[18] ——————, Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, Lectures Notes in Math., 570, Springer Berlin, 1977.

[19] A. Leites, Introduction to the theory of supermanifolds, *Uspekhi Math. Nauk*, **35**, **1**, 3—57, 1980

[20] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algébres de Lie associées, *J. Diff. Geom.*, **12**, 253—300, 1977.

[21] M. Scheunert, The theory of Lie superalgebras, Lectures Notes in Math., 716, Springer, 1979.

[22] C. L. Siegel, Symplectic geometry, *Amer. J. Math.*, 1—86, 1943.
[23] J. M. Souriau, Structures des systemes dynamiques, Dunod Paris, 1969.
[24] W. W. Symes, Hamiltonian group actions and integrable systems, *Physica*, **1**. D, 339—374, 1980.
[25] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Moscow Math. Soc.*, **12**, 1963.
[26] N. R. Wallach, Symplectic geometry and Fourier analysis, Math. Sci. Press, Brookline, Mass, 1977.
[27] A. Weil, Variétés kaehleriennes, Hermann, Paris, 1958.
[28] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Adv. Math.*, **6**, 329—346, 1971.
[29] ——————, Lectures on symplectic manifolds, C. B. M. S. regional conference series, 29, A. M. S. Rhode Island, 1977.
[30] H. Weyl, Classical groups, Princeton University Press, 1946.
[31] 严志达，半单纯李群李代数表示论，上海科学技术出版社，1963.

名词索引

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十一画以上

其　他

记　　号

Z	整数环
Z^+	非负整数集
R	实数域
C	复数域
Z_2	整数模 2 同余类环
TM	流形 M 的切丛
T^*M	流形 M 的余切丛
$C^\infty(M)$	流形 M 上 C^∞ 实可微函数全体
$\longrightarrow$	集合间的对应
$\mapsto$	元素间的对应